

Denis GUEDJ

Matematica explicată
ficelor mele

Traducere din franceză de Alexandru ȘICLOVAN



CARTIER

CARTIER®

Editura Cartier, SRL, str. București, nr. 68, Chișinău, MD2012.

Tel./fax: 24 05 87, tel.: 24 01 95. E-mail: cartier@cartier.md

Editura Codex 2000, SRL, Strada Toamnei, nr. 24, sectorul 2, București.

Tel./fax: 210 80 51. E-mail: codexcartier@gmail.com

www.cartier.md

Difuzare:



București: Strada Toamnei, nr. 24, sectorul 2.

Tel./fax: 210 80 51. E-mail: codexcartier@gmail.com

Chișinău: bd. Mircea cel Bătrân, nr. 9, sectorul Ciocana. Tel.: 34 64 61.

Cărțile CARTIER pot fi procurate în toate librăriile bune din România și Republica Moldova.

LIBRĂRIILE CARTIER

Casa Cărții, bd. Mircea cel Bătrân, nr. 9, Chișinău. Tel.: 34 64 61.

Librăria din Hol, str. București, nr. 68, Chișinău. Tel./fax: 24 10 00.

Librăria Vărul Shakespeare, str. Șciusev, nr. 113, Chișinău. Tel.: 23 21 22.

Colecția Verde este coordonată de Vitalie Coroban

Editor: Gheorghe Erizanu

Lector: Valentin Guțu

Coperta: Vitalie Coroban

Tehnoredactare: Marina Fusa

Prepress: Editura Cartier

Tipar: Combinatul Poligrafic (nr. 81541)

Denis GUEDJ

Les mathématiques expliquées à mes filles

© Éditions du Seuil, 2008

Denis GUEDJ

Matematica explicată fiicelor mele

Ediția I, iunie 2008

© Cartier, 2008, pentru prezenta versiune românească.

Această ediție a apărut în 2008 la Editura Cartier într-un tiraj de 800 exemplare. Toate drepturile rezervate. Cărțile Cartier sunt disponibile în limita stocului și a bunului de difuzare.

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Guedj, Denis

Matematica explicată fiicelor mele / Denis Guedj; trad. : Alexandru Șciocovan; cop. Vitalie Coroban.

– Ch. : Cartier, 2008 (Combinatul Poligr.). – 140 pag. – (Col. „Verde”).

Tit. orig. : Les mathématiques expliquées à mes filles

ISBN 978-9975-79-485-5

CZU 087.5:51

G 93

La ce se referă matematica?

— *Ce înseamnă a explica?* întrebă Lola.

— Mă iei tare! *Plicare*, „a plia” în latină, *explicare*, „a deplia”, dar mai înseamnă și complex și perplex. Când rămâi perplex în fața unui lucru complex, cauți o explicație. Iar explicația, prin deplicarea a ceea ce este pliat și încâlcit, va face acel lucru mai clar. Aceeași rădăcină precum *plexus*, da, nodul pe care îl ai acolo, în coșul pieptului, și care te doare atât de tare când ești stresată. A explica înseamnă a desface nodul. După explicație, totul devine mai clar în minte, iată de ce se spune că o explicație „luminează”. Este precum suflarea vântului ce alungă norii.

Ray așteaptă ca vântul să fi alungat norii.

— Lola, ce este matematica pentru tine?

Lola nu așteaptă mult până a răspunde:

— Este o materie plină de PROBLEME, ghiftuită de NECUNOSCUTE, în care suntem constrânși de REGULI. O materie în care profesorul este cel care pune problemele, iar eu sunt cea care trebuie să le rezolve!

Ray izbucni în râs.

Precum mulți dintre colegii ei, Lola era ZERO LA MATEMATICĂ. Sau, în fine, cel puțin asta susținea ea, cu obrăznicie fățișă. În această proclamație, rostită sus și tare, nu puteai să nu ghicești însă un fel de cochetărie, nulitatea în domeniul matematicii fiind la modă la unii elevi. Oare Lola chiar era mândră de aceasta sau era doar un mod de a revendica un handicap de care nu credea că s-ar putea descotorosi vreodată?

Ray și Lola conveniseră ca, pentru început, fiecare să spună ce-i place și ce detestă în matematică.

Lola începu, și începu cu convingere:

— Ca să fiu sinceră, mi-e greu să găsesc ceva care să îmi placă... dar nu dezarmez. Să spun pe rând ceea ce nu-mi place?

— Pe rând.

Începu rafala:

— În primul rînd, nu știu despre ce este vorba în matematică. Apoi, nu știu de unde să încep spre a rezolva o problemă, apoi nu am înțeles niciodată ce este o – silabisi – DE-MON-STRA-ȚI-E. Mă opresc sau merg mai departe?

— Mergi mai departe.

— Nu înțeleg la ce folosesc toate astea, vreau să spun, la ce folosesc în viața de zi cu zi.

În fine, spuse ceea ce îi stătea cel mai tare pe suflet:

— Matematicile sunt violente!

Ray o privi, siderat. Matematica, violentă!
Doar Lola putea profera o asemenea acuzație.
Își reveni, și cu un surâs discret:

— Păi, dacă simți o notă de violență în matematică, înseamnă că nu rămâi indiferentă!

Lola, destabilizată, spuse în cele din urmă:

— Dar închisoarea îl lasă indiferent pe prizonier?

— Matematica, o închisoare!!!

— Era doar o analogie, pur și simplu ca să conțrez argumentul tău și să-ți arăt că el nu demonstrează nimic. Cum ai vrea ca o materie asupra

căreia sunt constrânsă să mă aplec timp de mai multe ore pe săptămână să mă lase indiferentă!

— *Mi-ai putea spune prin ce este violentă matematica?*

— *Mi se pare brutală, rezultatele pică precum lama ghilotinei. Greșești o nimica toată și se duce totul de râpă, totul devine fals, complet fals, nu doar... puțin fals.*

Ray izbucni din nou în râs.

— *Și apoi, continuă Lola cu tirul ei, ai acea senzație că este așa și nicidecum altfel, ceea ce mă agresează. Mă simt neputincioasă. E ceva care îți închide gura. Iar mie nu-mi place să mi se închidă gura. Matematica este... este fără replică.*

— *Dar ce replică ai vrea să dai?*

— *Niciuna, tocmai.*

Ea remarcă zâmbetul ce apărea pe buzele lui Ray.

— *Oh, nu te bucura prea repede. Dacă nu am nimic de replicat, este doar pentru că nu mă interesează într-atât, încât să am ceva de spus. Am ceva de spus doar despre ceea ce mă interesează!*

— *Chiar ești sigură că numai în matematică lucrurile sunt „într-un fel și nicidecum altfel”?*

Sena traversează Parisul și nu Strasbourgul, așa stau lucrurile și nicidecum altfel. Bastilia a fost cucerită pe 14 iulie 1789, nu pe 13. Așa s-a întâmplat, nu altfel.

— *Da, dar s-ar fi putut.*

— *Ce s-ar fi putut?*

— *Să fie cucerită pe 13.*

Spulberat de replica Lolei, Ray înțelese că schimbul de replici – confruntarea? – nu avea să fie ușoară.

— De acord, admise el până la urmă. Profesorul tău de istorie ce face? Explică de ce Bastilia a căzut pe 14 iulie, dă motive, expune faptele, arată de ce evenimentul a avut loc la acea dată. La fel și la geografie, legat de cursul Senei. Lucrurile ar fi putut fi altfel, desigur, dar, dacă sunt astfel, există motive pentru aceasta. Deseori, de aceea se explică, se prezintă motivele.

— *În matematică, tocmai am impresia că lucrurile nu ar fi putut fi altfel. Ele sunt așa cum sunt, iar acest lucru este violent. Un triunghi isoscel nu poate să nu aibă două unghiuri egale! Piesa s-a jucat înainte de sosirea ta. Și te întrebi, atunci ce mai caut eu în scenă?*

— Dar și cursul Senei „s-a jucat” înainte de venirea ta.

— *E adevărat, dar îl resimt altfel.*

— *De ce crezi una ca asta?*

— *Chiar cred asta pentru că, la matematică, nu înțeleg despre ce este vorba. La istorie, la geografie, la franceză, la chimie, la fizică înțeleg. Chiar dacă nu mă prind mereu, am o vagă idee despre ceea ce se discută. Matematica, în schimb, este ca un limbaj secret.*

— *Ah, strigă Ray. Dacă este un limbaj secret, se referă la ceva, nu la nimic, de acord?*

— *Eh, tot acolo ajungem, deoarece, în ambele cazuri, nu știu despre ce este vorba.*

— *Nu. Nu ajungem tot acolo, deoarece, dacă este un limbaj, secret sau nu, acesta vorbește despre ceva. Deci ai putea încerca să-l deciprezi. Ești de acord măcar cu faptul că matematica nu poate să nu se refere la nimic?*

— *Prezentată sub această formă, sunt obligată să recunosc faptul că, da, matematica se referă cu siguranță la ceva. Dar la ce?*

— *Ei bine, te anunț că, atunci când deschizi un curs de matematică, începi de fapt un curs de limbă. Nu chiar precum cursul tău de chineză, dar, cu siguranță, un curs de limbă.*

— *În franceză, în chineză, există oameni, texte, persoane care comunică spre a exprima idei, sentimente, informații, chiar și declarații de dragoste.*

Cuprinsă de o idee spontană:

— În matematică se poate spune „Te iubesc”?

Luat prin surprindere, Ray ezită, dar fu constrâns să admită că, în matematică, nu se poate spune „te iubesc”.

— Nu am afirmat că s-ar putea spune orice, dar se pot exprima multe idei: a fi între, a fi de o parte și de alta, a fi cel mai mare, cel mai mic, a fi aproape, a determina, a acoperi, a se întâlni...

Cu încrederea recăpătată, declară:

— Matematica este un limbaj, dar nu doar atât, desigur. Un limbaj ce permite exprimarea de gânduri, enunțarea de idei, stabilirea unor propoziții, punerea unor probleme, afirmări, respingeri, descrieri. Și nu este un limbaj secret, deoarece regulile de scriere care îl guvernează sunt publice, oricine și le poate însuși. Ba chiar mai mult, elevii nu doar că pot, ci TREBUIE să și le însușească, ele constituie o parte esențială a materiei.

— *În ce țară voi putea învăța acest limbaj? Arată-mi-o pe o hartă, spre a mă putea înscrie la un curs de perfecționare lingvistic.*

— Domnișoara mă persiflează. Acest limbaj îl înveți la cursul de matematică.

— Poate ar trebui să fac și traduceri și versiuni în matematică...

— Categoric. Traducerea unui text matematic în limbaj curent este un exercițiu excelent. Să facem un inventar al cuvintelor și al semnelor pe care le întâlnim în matematică.

Ray scrisese ceva scurt pe o foaie pe care i-o întinse Lolei.

— Iată trei expresii. Dacă folosim sintagma de *expresie matematică*, aceasta este deoarece scrierea exprimă ceva, o idee, un fapt. Fie deci trei expresii care se aseamănă, și care totuși sunt de natură complet diferită:

„ $2+ =$ ”, „ $2 = 1+3$ ”, „ $2 = 1+1$ ”

„ $2+ =$ ”, această expresie nu vrea să spună nimic. Nu este falsă, putem chiar afirma că nu este nici măcar falsă. Pentru a fi astfel, este nevoie ca ea să aibă un sens. Or ea nu are sens. Este *prost construită*, deoarece nu este scrisă conform regulilor de scriere.

„ $2 = 1+3$ ”, înțeleg ceea ce vrea să spună: numărul 2 și numărul $1+3$ sunt egale. Înțeleg. Dar este fals.

„ $2 = 1+1$ ”, înțeleg ceea ce vrea să spună: numărul 2 și numărul $1+1$ sunt egale. Înțeleg și este adevărat.

Cea mai mare parte dintre erorile de matematică provin din faptul că propozițiile pe care le scriem nu au sens. Prima precauție deci este aceea de a ne asigura că ele sunt scrise conform regulilor de scriere.

Ray detașă încă o foaie, scrise pe ea și i-o întinse Lolei.

— „ $D+D' = 2$ ”, „ $2//3$ ”. Iată două propoziții prost construite. Ah, uitasem: D și D' sunt drepte.

„ $D+D' = 2$ ”, deoarece nu știm ce înseamnă „suma a două drepte”, semnul $+$ neexistând în geometrie.

„ $2//3$ ”, deoarece nu știm ce înseamnă „două numere paralele”, semnul $//$ neexistând în aritmetică. Să facem un inventar al părților de vorbire folosite în limbajul matematic. Cuvinte din limbajul curent: articole: *un, o, niște*; propoziții: *în*; conjuncții: *și, precum, care*; verbe, unele exprimând o cerință: *construiți, găsiți, determinați, verificați, trasați...*, altele care prezintă obiecte: *se consideră, se dă*; cuvinte specifice matematicii, cel mai frecvent nume de obiecte, *mediană, mediatoare, diagonală, funcție, cilindru, sinus, cosinus* etc.; dar și adjective: *isoscel, echilateral, paralel, par...*

Simboluri specifice limbajului matematic, care permit scrierea operațiilor într-o manieră simplificată, $+$, \times , \dots , relații, $=$, $//$, \dots

Să trecem la propoziții: ce tip de propoziții întâlnim în matematică? Enunțuri, prezentări de obiecte sau situații și care formulează cerințe. Atunci când un obiect nou apare în universul matematic, trebuie să-i completăm certificatul de naștere, acesta este rolul *definiției*, care semnează intrarea sa oficială în universul matematic. În definiție, figurează numele și informațiile care permit caracterizarea obiectului. Definițiile încep invariabil cu...

Lola îl întrerupse:

— *Profesorul își schimbă tonul și, cu o voce pompoasă, declamă: „Definiție. Numim chestie...”*

— Este normal, definiția reprezintă un act fundamental. Este un moment important în istoria matematicii. Spre deosebire de definirea cuvintelor din franceză, definițiile matematice nu sunt totalmente descriptive, sunt direct operatorii cu alte cuvinte, nu se poate face matematică decât dacă se cunosc cu exactitate definițiile, punând la treabă fiecare cuvânt al acestora. Iată de ce fiecare definiție trebuie reținută extrem de corect. Un singur cuvânt uitat și...

— ... e complet fals, nu doar... puțin fals...
Asta e ceea ce nu pot eu suporta.

— Totuși este unul dintre lucrurile cele mai importante pe care le poate aduce matematica, precizia, este una din calitățile matematice care chiar pot să-ți folosească „în viața de zi cu zi”, precum spui tu. A fi precis nu înseamnă a fi maniac. Atunci când matematicienii descoperă idei noi, concepte noi, obiecte noi, se întâmplă deseori ca ei să le dea un nume spre a putea vorbi despre ele și spre a le utiliza, fără a le da, totodată, și o definiție riguroasă. De exemplu, dreapta, cercul etc. au „funcționat” cu mult timp înainte ca Euclid să le dea o definiție. La fel și astăzi.

— *De ce petrecem timpul scriind egal?*

— Îți poți imagina matematica fără semnul egal? Este semnul cel mai important din matematică. Când scriu $2 = 1+1$, ce spun? Spun că numerele 2 și $(1+1)$ sunt ACELAȘI număr, că sunt două forme diferite ale aceluiași număr, iată de ce le egalez. Ba mai mult, egalez toate formele posibile ale lui 2:

$$(1+1) = (5-3) = \left(\frac{10}{5}\right) = (2 \times 1) = \dots$$

— *Cu ce te ajută asta?*

— Dacă, dintr-un motiv sau altul, am nevoie ca 2 să se prezinte sub forma unei sume, îl pre-

zint ca $(1+1)$. Dacă am chef ca el să apară precum o diferență, îl prezint ca $(5-3)$ etc. Astfel, în funcție de nevoi, folosesc una dintre nenumăratele sale identități.

Când scriu $a=b$, anunț faptul că a și b sunt interschimbabile, acolo unde se găsește a , îl pot înlocui cu b . Și invers.

Contrariul lui egal este *diferit*. Se notează cu un egal barat, « \neq ». Diferit înseamnă „care nu sunt identice” și numai aceasta. De aceea, nu trebuie sub nicio formă să-l confundăm cu mai mic sau mai mare, « $<$ » sau « $>$ ».

— *Egalul a existat dintotdeauna?*

— Ideea de egalitate, da, dar nu și semnul. În 1557, un medic englez, Robert Recorde, a avut ideea de a trasa micul semn pe care îl cunoști: $=$. Atunci când a fost întrebat care au fost motivele alegerii sale, el a răspuns: „Am ales o pereche de paralele sau de drepte gemene, deoarece nimic nu este mai asemănător decât doi gemeni”.

— *Și înainte cum se proceda?*

— Se scria egal folosind literele, *aequali*, în latină. Toate cuvintele matematicii se scriau cu litere, nu exista niciun simbol. O scriitură literală, infinit mai complicată, mai lungă și foarte puțin practică.

— Pe vremea aceea, textele matematice semănau deci cu celelalte texte?

— Absolut.

— Și + și – ?

— Este o poveste cu cufere.

— Cu cufere?

— Prin anul 1500, în Germania, unele mărfuri erau vândute în cufere de lemn. Pline, acestea trebuiau să cântărească 4 *centner* (cam 50 kg). Dacă una dintre ele avea un deficit de greutate, de exemplu 5 livre, se scria pe cufăr 4c-5l. Dacă prezenta un exces de greutate, de exemplu de 3 livre, se bara linia și se scria pe cufăr 4c+3l. Semnele au trecut de pe cuferele de lemn pe foile de hârtie și din comerț în algebră.

Egiptenii foloseau două hieroglife:



adunare



scădere

Pe aceste desene, putem vedea:

A aduna: cele două picioare merg în sensul scrisului.

A scădea: cele două picioare merg în sens invers scrisului.

— *Plus este un minus barat, diferit este un egal barat.*

— Bună observație. În matematică, există o mulțime de feluri de a spune „diferit”, precizând prin ce anume diferă două elemente. Când este vorba de numere, se face *diferența*, $(a-b)$. Dacă aceasta nu este nulă, cele două numere sigur nu sunt identice. Există încă o modalitate la care nu ne gândim îndeajuns: raportul.

Facem raportul $\frac{a}{b}$. Dacă $\frac{a}{b} \neq 1$, numerele sunt diferite.

— *Și celelalte semne? X-ul de la înmulțire?*

— Un englez, Oughtred, este cel care l-a inventat pe la 1600.

— *Și mai mare și mai mic?*

— Un alt englez, Thomas Harriot, cu ceva timp mai înainte.

— *De ce unul este deschis spre dreapta și celălalt spre stânga?*

— Habar nu am. Ba da, ba da, reveni, cred că este deschis în direcția numărului mai mare.

— *Și radicalii?*

— Un german este cel care a inventat semnul. Se spune că $\sqrt{\quad}$ este o transformare a lui R de la *radix*, „rădăcină” în latină.

— *Da, dar de ce rădăcină?*

— Ce este $\sqrt{2}$? Este numărul al cărui pătrat este 2: $(\sqrt{2})^2$. Spunem, de asemenea, că „ridicăm” la pătrat. Astfel, ridicând $\sqrt{2}$ la pătrat, obținem 2. Avem în minte imaginea *rădăcinii* unei plante îngropate în pământ, care, atunci când se ridică, generează planta.

— *Drăguță explicație. O întrebare pe care mi-am pus-o deseori: au existat dintotdeauna numere?*

Punct ochit:

— *Au existat dintotdeauna numere?*

Numerele

— Numerele au fost inventate încă din zorii umanității spre a răspunde la întrebarea „Cât?”. Câți copii sunt în trib? Câte oi sunt în stână? Câte stele sunt pe cer? Câte zile mai sunt până revine luna plină? Numerele sunt una dintre cele mai mari invenții ale umanității; grație lor, putem număra, măsura, calcula.

În același fel în care oamenii au învățat să conserve focul, au învățat să conserve și numerele. Pentru a-și aminti o cantitate, îi păstrau urma prim marcaje pe oase, pe pietre, după cum și prin folosirea de obiecte, de pietricele, *calculus*, scoici, noduri pe frânghii. Apoi, au început să noteze semne pe suporturi precum argila, lemnul sau papirusul. Astfel a luat naștere scrisul.

După ce au reprezentat numerele, oamenii au început să calculeze, să efectueze operații, la

început adunarea, apoi înmulțirea. Adunau, clasa-
sau, enumerau, ordonau.

Ray întinse mâna și deschise palma.

— Mâna a fost prima mașină de calcul din istorie, de care oamenii s-au folosit timp de mii de ani.

Primele numere au fost cele *naturale*, care permiteau numărarea și calculul. Apoi, *fracțiile*. Apoi, zero, apoi, numerele negative, citez în ordinea în care au apărut în istorie.

— *Cifre, numere, mereu le încurc.*

— Tu spui „o cifră de trei numere” sau „un număr de trei cifre”?

— *Un număr de trei cifre! Ce ingenios, admise Lola.*

— Numerele sunt compuse din cifre, precum cuvintele sunt compuse din litere!

— *Cifrele sunt alfabetul numerelor, asta vrei să mă fac să spun.*

— Într-adevăr. Iar numerația noastră este zecimală.

— *Deoarece folosim 10 cifre. Dar cifrele sunt și numere. 1, 2, 3...*

— Corect.

— *Și invers nu.*

— Corect. 10, de exemplu...

— ... *nu este o cifră*.

— Este cel mai mic număr care nu este o cifră. 5 este o dată cifră în 555 și număr în „5 degete”. În calitate de cifră, este un semn de scriere. Ca număr, exprimă o cantitate. Contrar a ceea ce credem deseori, cifrele au fost inventate după, mult după numere. În timp ce numerele foloseau la rostirea cantităților, cifrele foloseau la scrierea numerelor.

Problema care survine la numere este că sunt foarte multe. Aceasta este chiar marea lor calitate și, dacă există ceva ce nu ne-am dori să ne lipsească, acestea sunt numerele.

— *Dat fiind că există o infinitate de numere, cum le putem denumi pe toate?*

— Toată lumea intuiește că șirul numerelor naturale nu se oprește, că se poate merge mereu mai departe. Nu există un „cel mai mare număr natural”. Dacă ar exista unul, să zicem A , A fiind natural, și $A+1$ ar fi unul la fel. Or $A+1$ este mai mare decât A , ceea ce contrazice faptul că A este cel mai mare. Acest tip de demonstrație este o *demonstrație prin reducere la absurd*. Nu există deci un număr natural care să fie cel mai mare, ceea ce implică faptul că sunt o cantitate infinită. Toate

civilizațiile s-au confruntat cu întrebarea pe care ai pus-o tu. Să presupunem că atribuim numele fără vreun criteriu, la nimereală. Curând, am ajunge să nu mai știm ce nume denumește fiecare număr. Ar fi o dezordine totală. De aceea, au fost concepute procedee sistematice pentru atribuirea numelor, în așa fel încât să ofere informații despre numerele pe care le denumesc. De unde să se înceapă? În primul rând, alegerea cifrelor, cu alte cuvinte, a unor numere „alese”, având ca scop reprezentarea celorlalte numere. Apoi, elaborarea unor moduri de combinare a acestor cifre pentru a scrie numerele. Este ceea ce numim o *numerație*. Unele dintre ele sunt ingenioase, altele greoaie, puțin eficace. Romanii erau reputați ca fiind slabi la acest capitol: erau nevoiți să creeze noi cifre cu atât mai mult cu cât numerele pe care voiau să le reprezinte erau mai mari! X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000) și altele, și altele. Trebuiau să creeze cifre fără încetare. Îți dai seama că sistemul devine impracticabil dacă sunt zeci și zeci de cifre. Pentru a funcționa, este nevoie ca numărul de cifre să fie fixat odată pentru toate numerele și ca acest număr să fie redus.

Grecii, evreii foloseau numerații care nu erau geniale, în timp ce mesopotamienii și mayașii

dispuneau de o numerație foarte eficace. Cei din urmă foloseau o numerație în baza 20, iar primii nu foloseau decât două cifre, 1 și 60.

— *Precum în binar.*

— Nu. În binar se folosește obligatoriu 0. Nu există decât două cifre, 0 și 1.

— *Tot nu mi-ai răspuns la întrebare.*

— Îți răspund: singurul sistem capabil să denumească toate numerele, oricât ar fi de mari, este cel pe care îl folosim astăzi și pe care îl folosește toată lumea, *numerația de poziție cu un zero*. Un grup de cifre fixate *a priori* și un principiu, principiul de poziție care statuează următorul lucru: valoarea unei cifre, exceptând valoarea sa particulară, depinde de poziția pe care o ocupă în scrierea numărului. În 1717, primul 1 valorează o mie, al doilea zece, primul 7 valorează șapte sute, al doilea valorează șapte. Valoarea ce depinde de poziție este o idee cu adevărat genială.

— *Valoarea se schimbă în funcție de locul unde te situezi. Nu cumva este ca și în viață?*

— Da, ai dreptate. Deseori, valoarea care ni se conferă depinde de locul pe care îl ocupăm în societate, ceea ce e, deseori, foarte nedrept. Dar, pentru numerații, această metodă este cea mai bună care poate fi închipuită, realizează visul

tuturor civilizațiilor: cu o mână de cifre, câte degete avem la două mâini, putem denumi TOATE NUMERELE DIN LUME! Oricare ar fi numărul prezentat, i se atribuie un nume și acesta este unic. Fără nicio ambiguitate. Și, în plus, mărirea unui număr este vizibilă în numele său: cu cât numele este mai lung, cu atât numărul este mai mare. Nu există metodă mai bună!

— *De când există 0?*

— Prin secolul al V-lea înaintea erei noastre, babilonienii au inventat un semn spre a marca locul neocupat. Când vrem să exprimăm numărul o sută într-o numerație de poziție, să zicem în cea zecimală, îl descompunem în unități, zeci, sute... Deci, pentru o sută unu: 1 sută, 1 unitate, scriu 11. Dar 11 este zece și o unitate, deci unsprezece. De unde provine confuzia? De la faptul că nu am ținut cont de absența zecilor.

— *A ține cont de absență!*

— Ar trebui spus o sută unu, este 1 sută, nici un zece, 1 unitate. Dar cum să se marcheze absența zecilor? Printr-un nou semn, 0, care înseamnă „loc neocupat”. Acest semn, ce permite scrierea numerelor, este deci o cifră, care se adaugă celorlalte nouă. Atunci, o sută unu se va exprima fără vreo ambiguitate, 101.

Există și o a doua semnificație a lui 0. Când scădem o cantitate din ea însăși, de exemplu 5-5. Cum să semnalez că nu rămâne nimic, luând 5 din 5?

În acest caz nu mai este vorba de scriere, cum era în situația indicării unui loc neocupat, ci de a marca o cantitate, *cantitatea nulă*. 0 este, în acest caz, un număr. Loc neocupat, cantitate nulă, iată cele două chipuri ale lui zero.

— *Mereu am impresia că se frizează catastrofa când se folosește 0. De parcă ar urma să ne explodeze în față.*

— De exemplu?

— *Putem împărți cu orice, dar niciodată cu 0.*

— Există motive pentru aceasta sau este o decizie arbitrară a profesorului tău?

— *Să zicem că ar fi motive.*

— Pe care ai vrea să le cunoști?

— *Pe care mor de nerăbdare să le cunosc.*

— La înmulțire, 0 domină orice alt număr: $0 \times n = 0 \times m = 0$. S-a putut spune că este un element *anihilant* (*n.r.* – nul). Pe de altă parte, la adunare, nu are niciun efect: $n + 0 = n$, 0 este *element neutru* la adunare.

Și împărțirea cu 0? Să presupunem că am putea împărți cu 0, hai să analizăm consecințele

unei asemenea ipoteze. Fie a un număr oarecare, insist, oarecare, pe care îl împărțim la zero. Operația fiind permisă, rezultatul este un număr, să zicem b . Avem deci $\frac{a}{0} = b$ Produsul mezilor fiind egal cu produsul extremilor, îți aduci aminte, desigur: $a=0 \times b$. Or, $0 \times b = 0$, deci $a=0$, a fiind un număr oarecare. Ce am demonstrat? Că, dacă ar fi autorizată împărțirea la 0, toate numerele ar fi nule!

— *Ar fi jenant, admise Lola. Nu ar exista decât un număr, și acesta ar fi zero! Cu toate că ar fi un avantaj, cel puțin: toată lumea ar avea aceeași notă! Și am fi cu toții nuli la matematică.*

— Nu cumva se numește aproximare inferioară aceasta? Presupun că nu apreciezi interdicțiile. Interdicția absolută în aritmetică este împărțirea cu 0. Aceasta atrage după sine niște precauții. Confruntat cu un raport $\frac{P}{Q}$, din reflex, trebuie să ne grăbim să scriem « $Q \neq 0$ », pentru a preîntâmpina „catastrofele” care n-ar întârzia să apară dacă Q ar fi nul.

— *Și sistemul binar prin ce este atât de diferit de cel zecimal?*

— Dimpotrivă, sunt asemănătoare. Ambele sunt numerații de poziție cu un zero, singura di-

ferență fiind numărul de cifre, zece pentru sistemul zecimal, două pentru cel binar.

Avantajul sistemului binar: folosește puține cifre; inconvenient: scrierile numerelor sunt mult mai lungi. Numărul zecimal 99 se scrie 11000011 în binar. Diferența de lungime dintre cele două scrieri este evidentă.

— *De ce este atât de important sistemul binar?*

— În secolul al XVII-lea, marele matematician și filosof Leibniz s-a mobilizat pentru a-l face să fie adoptat de către colegii săi, dar nu a mers, iar binarul a fost uitat. Până la apariția calculatoarelor; atunci a fost imediat perceput ca limbajul cel mai bine adaptat la comunicarea cu mașinile. Limbajul nostru scris este compus din cuvinte și numere, douăzeci și șase de litere și zece cifre, deci treizeci și șase de semne, la care se adaugă spațiul și semnele de punctuație. Pentru a comunica cu o mașină, informația va fi transmisă printr-un curent electric. Or curentul admite doar două stări; curentul trece sau nu trece. S-a ales utilizarea cifrelor 1 și 0. Trecerea curentului: 1, oprire: 0. Apoi, s-au codificat cele 36 de semne prin șiruri de 1 și 0. Iată unde intervine sistemul binar.

Ray caută prin hârtiile sale, dintre care scoase o foaie mototolită și începu să citească:

— A se scrie 01000001. B, 01000010, ... până la Z. Iată de ce sistemul binar, cu cele două cifre ale sale, este suficient spre a traduce orice propoziție din orice limbă, conținând cuvinte și numere. Informația este transportată pe o cale electronică, extrem de rapidă.

Când apeși pe tasta A de la calculatorul tău, determini impulsuri electrice de intensități diferite, cele slabe corespund lui 0, cele puternice lui 1.

Deci, pentru litera A, 01000001, unul slab, unul puternic, cinci slabe, unul puternic. Această suită de impulsuri va permite selecția – dintr-un catalog stocat în memoria calculatorului – a unei alte secvențe de 0 și 1, care corespunde punctelor aprinse sau stinse de pe ecran, care vor desena în final litera A. Astfel, sistemul binar constituie limbajul calculatoarelor și permite reprezentarea sunetelor, textelor, imaginilor, ce vor fi înscrise pe CD, DVD etc. Astfel, se intră în lumea „numericului”, în care informațiile sunt transmise prin procedee ce utilizează numere.

Să continuăm inventarul numerelor. După numerele naturale, fracțiile, din latinescul *fractus*, „fragmentat”. O fracție este un „număr fragmentat”.

— *Fiindcă nu este „întreg”?*

— Exact. O fracție este compusă din două numere întregi și o *linie*. De exemplu, $\frac{7}{5}$. Sub linie, „cel ce numește”, *numitorul*, în acest caz este vorba despre cincimi, a cincea parte din unitate. Deasupra, *numărătorul*, „cel ce numără”: aici, 7. Frația ne spune că sunt șapte cincimi.

Una dintre proprietățile pe care le întâlnim de cum abordăm fracțiile este o consecință imediată a egalității a două fracții. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $a \times d = b \times c$. O egalitate între două fracții produce o egalitate între două numere întregi, rezumată prin celebra formulă: produsul mezilor este egal cu produsul extremilor. Este cunoscută și sub numele de „produs în cruce”.

— *La numerele naturale, adunarea este simplă, iar înmulțirea complicată. În cazul fracțiilor, este exact invers. De ce?*

— Aducere la același numitor! Numitorul fiind cel care denumește, trebuie ca fracțiile să denumească același lucru, altfel nu le putem aduna fără precauții. Am vrea noi ca $\frac{12}{7} + \frac{19}{11}$ să fie suma numărătorilor supra suma numitorilor, $\frac{12+19}{7+11}$, ne-ar face viața mult mai ușoară. Dar, din

păcate, este fals! Deoarece, urmând principiul „nu adunăm mere cu pere”, nu are niciun sens să adunăm șeptimi cu unsprezecimi. Ce adunăm atunci? Șeptimi cu șeptimi, unsprezecimi cu unsprezecimi. Altfel spus, fracții cu același numitor. Cum facem ca fracții care nu au același numitor să aibă totuși un numitor comun? Prin aducerea la același numitor 7×11 , abia atunci putem aduna numărătorii.

$$\frac{12 \times 11}{7 \times 11} + \frac{19 \times 7}{7 \times 11} = \frac{132}{77} + \frac{133}{77} = \frac{265}{77}$$

Și înmulțirea? Merge de la sine, se înmulțesc numărătorii, se înmulțesc numitorii.

$$\frac{12}{7} \times \frac{19}{11} = \frac{12 \times 19}{7 \times 11}$$

Ca să-ți aduci aminte, jumătatea jumătății este $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, este $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2}$, produsul numărătorilor supra produsul numitorilor. Ai dreptate când afirmi că adunarea fracțiilor este mai complicată decât înmulțirea.

— *Între două fracții, nu este ușor de știut care este mai mare.*

— În cazul a două numere naturale, se poate vedea din prima care este cel mai mare. Nu

este cazul și pentru fracții. Este greu de spus care este mai mare între $\frac{12}{7}$ și $\frac{19}{11}$ de exemplu. Trebuie făcut un calcul, o aducere la același numitor: $\frac{12 \times 11}{7 \times 11}$ și $\frac{19 \times 7}{7 \times 11}$. Nu ne mai rămâne decât să comparăm numărătorii, 132 pentru prima, 133 pentru cea de-a doua. $\frac{19}{11}$ este mai mare decât $\frac{12}{7}$, categoric nu era o concluzie observabilă *a priori*.

Una dintre primele decizii pe care le-au luat matematicienii greci a fost aceea de a tria numerele naturale, prin separarea în două grupuri: cele care sunt divizibile cu 2, duble, *pare*; cele care nu sunt, cele „ne-pare”, *impare*. La prima vedere, nu pare a însemna mare lucru, dar această simplă distincție pe care nu o efectuase nimeni înaintea lor le-a permis să „facă matematică”: să stabilească rezultate generale referitoare la familii infinite de obiecte. Dispunând de aceste familii de numere, P, cele pare, și I, cele impare, au pornit în căutarea de rezultate aplicabile nu doar la câteva numere, ci la TOATE cele pare, TOATE cele impare. Iată una dintre întrebările pe care și le-au pus: cum se comportă paritatea în principalele operații? Se păstrează? Dacă adun două numere pare, suma este tot un număr par? Adunarea conservă paritatea?

Să luăm un exemplu. $2+4=6$, suma este pară. Dar aceasta nu constituie o dovadă, deoarece nimic nu ne asigură că, la alegerea altor două numere pare, suma va fi din nou un număr par. Pentru a putea trage o concluzie, nu puteau alege altă cale decât construirea unei demonstrații. Mi-ai spus că nu ai înțeles niciodată ce e o demonstrație. Hai să nu fim scârțari! Să construim una nouă!

Pentru început, pornind de la definiție, trebuie elaborată o formulă generală a ceea ce este un număr par. Un număr par este ceva dublu, deci egal cu „de două ori un alt număr natural”, pe care îl notez $2n$, n fiind un număr natural oarecare. Această formulare permite generarea tuturor numerelor pare și numai a acestora, dând toate valorile posibile lui n . Iată o scriere operativă, care ne permite să avansăm în demonstrație. Suma a două numere pare: $2n+2n'$. Scriu n și n' , deoarece, dacă aș folosi același n , ar însemna că cele două numere trebuie să fie egale, iar generalitatea proprietății pe care vreau să o stabilesc ar fi sacrificată. $2n+2n'$, în acest stadiu nu pot trage nicio concluzie. Trebuie să transform această scriere într-una care să-mi „vorbească”: „de două ori un număr”. Scoaterea factorului: $2n+2n'=2(n+n')$.

n și n' fiind două numere naturale, suma lor este un număr natural n'' , care corespunde formei unui număr par. Tocmai am demonstrat că suma a două numere pare este un număr par.

Iar cele impare? Trebuie să elaborez o metodă de a le scrie, asemănătoare cu cea pe care am elaborat-o pentru cele pare. De exemplu, obțin un număr impar adăugând 1 la unul par, deci $(2n+1)$. Să-i dăm înainte cu demonstrația!

$(2n+1)+(2n'+1) = 2n+2n'+2 = 2(n+n'+1)$, dar dacă n și n' sunt numere naturale, atunci și $n+n'+1$ este număr natural. Să reluăm seria de egalități, $(2n+1)+(2n'+1) = 2n+2n'+2 = 2(n+n'+1) = 2n''$, deci un număr par. Pot anunța că suma a două numere impare este un număr par. Paritatea nu se conservă. Dar rezultatul nu este mai puțin folositor, a ști că suma a două numere impare este (mereu) pară constituie un rezultat la fel de util ca și cum ar fi fost egală cu un număr impar. Pe de altă parte, dacă nu s-ar fi putut afirma nimic *în general* despre suma a două numere impare, abia atunci am fi fost într-o situație mai puțin interesantă.

Să vedem ce se întâmplă la înmulțire. Să înmulțim două numere pare $2n \times 2n' = 4n \times n'$. Pentru a transforma această scriere într-una care să „îmi

vorbească”, trebuie să fac să apară 2 ca factor al unei expresii. Să încercăm: $4n \times n' = 2(2n \times n') = 2n''$, deci un număr par.

Pentru cele impare: $(2n+1) \times (2n'+1) = 4nn' + 2n + 2n' + 1 = 2(2n \times n' + n + n') + 1 = 2n'' + 1$, adică un număr impar. Par ori par = par, impar ori impar = impar. Din aceasta, trag concluzia că înmulțirea păstrează paritatea. Asta înseamnă a face matematică: a stabili rezultate privitoare la familii de obiecte definite prin proprietăți generale.

— *De ce înmulțim atunci când am putea face adunări în locul lor?*

— Înmulțim tocmai pentru a nu face adunări.

Scriu: $2+2+2+2+2$ (9 semne), în timp ce folosind înmulțirea: 5×2 (3 semne). „Câștig” șase semne.

— *Dar puterile? Când au apărut?*

— După cum înmulțirea este o suită de adunări, ridicarea la o putere este o suită de înmulțiri. Scriu $5 \times 5 \times 5$ (5 semne), iar folosind puterile scriu 5^3 (2 semne). Am câștigat 3 semne.

În operațiile cu numere, sunt trei nivele, adunare, înmulțire, putere. O înmulțire este o suită de adunări, o putere este o suită de înmulțiri. Teoretic deci am putea face toate calculele doar cu adunări. De exemplu, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = (5+5+5+5+5) + (5+5+5+5+5)$

+5)+(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5).
49 de semne, fără a pune la socoteală parantezele!!
De altfel, acesta este modul de operare al calculatoarelor, prin adunări repetate: multe, multe adunări, dar fiecare efectuată într-un timp infim.

— *Există vreo legătură între pătrat și ridicarea la pătrat?*

— Matematicienii greci au țesut strânse legături între numere și formele geometrice. Pentru ei, pătratul, figura, de latură 5, având ca suprafață 5×5 , era legat de numărul „pătratul lui 5”, 5 la pătrat, 5^2 . În mod asemănător, pentru cubul de latură 5, al cărui volum este numărul „cubul lui 5”, 5 la cub, 5^3 .

În același fel în care s-au stabilit reguli de calcul pentru fracții au fost stabilite reguli de calcul pentru puteri. Aceste reguli nu sunt arbitrare, ele se trag direct din definiția unei puteri.

Și de astă dată înmulțirea este mai simplă decât adunarea.

$2^3 + 2^5 =$ fără simplificare. Și, mai ales, nu dă 2^{3+5} !

Pe de altă parte, $2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$. Elimin parantezele, am acest drept, este o proprietate a înmulțirii numerelor naturale: $2^3 \times 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 2^{3+5}$.

Această regulă este capitală, este cea mai importantă referitoare la puteri. Să o examinăm. La stânga, un produs de puteri, la dreapta, suma exponenților: $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Această trecere de la sumă la produs și invers este caracteristică puterilor. Aceasta conferă puterilor o mare parte din interes: dacă vreau să multiplic două puteri ale aceluiași număr, nu am decât să adun exponenții lor, cu alte cuvinte, înlocuiesc o înmulțire cu o adunare!

— *De ce este mai simplă înmulțirea decât împărțirea?*

— Deoarece împărțirea nu este definită în mod direct, precum înmulțirea sau adunarea. Este definită pornind de la înmulțire, este *operația inversă* înmulțirii. Atunci când ne apucăm de o împărțire, trebuie avută în minte înmulțirea. Ce este raportul $\frac{A}{B}$? Este numărul C , câtul, care este un număr ce satisface relația $B \times C = A$. A face o împărțire înseamnă a găsi numărul C care „se potrivește”, cel care înmulțit cu B dă A .

— *De ce împărțirea, care este mai complicată, este mai importantă decât înmulțirea?*

— Înainte de a vorbi despre împărțire, vom vorbi despre partaj. A partaja un număr A în

două părți înseamnă a găsi două numere a căror sumă este egală cu A .

A partaja o mulțime de șase elemente în două părți. Submulțimi posibile: (1,5), (2,4), (3,3), (6,0). Dintre cele patru alegeri, una singură este „simetrică”: (3,3), cea care se obține prin împărțirea la 2. Împărțirea este SINGURA distribuție egalitară. Aceasta este marea sa virtute. Cele două jumătăți sunt egale, cele trei treimi egale etc.

Avem o părere proastă despre împărțire deoarece este o operație greu de efectuat, dar, dintre cele patru operații, este, fără îndoială, cea care furnizează cele mai multe rezultate importante. Divizorii oferă multe informații despre numărul pe care îl divid, după cum multiplii nu dau vreo informație despre numerele ai căror multipli sunt.

Fiecare număr admite o infinitate de multipli, în timp ce admite un număr finit de divizori; cei din urmă fiind în mod obligatoriu mai mici decât numărul.

— *Acest lucru are vreo legătură cu numerele prime? Au o importanță atât de mare numerele prime?*

— O, da! Abia am văzut distincția operată de greci între numerele divizibile cu 2 și celelalte. O

altă distincție importantă a fost practică între numerele care sunt divizibile prin anumite numere și cele care nu sunt. Să luăm drept exemplu 6 și 7. Primul este divizibil cu 2 și 3, al doilea nu este divizibil deloc. Ca și 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19... pe care le numim *prime* deoarece nu le putem obține prin multiplicarea altor numere. Un număr prim este cel ce nu are divizori (n.r. – proprii) și care nu este multiplul niciunui număr.

Matematicienii sunt fascinați de ele din cauza unui rezultat extrem de important: fiecare număr natural poate fi obținut printr-un produs de numere prime. Dacă dispun doar de numere prime, pot obține toate numerele!

Mereu aceeași idee: există anumite elemente ale unei familii ce permit construirea întregii familii? Precum triunghiurile ce permit construirea tuturor poligoanelor.

Numerele prime sunt „cărămizile” cu care construim toate numerele prin înmulțire. Fiecare număr natural este un produs de numere prime. Și, dimpotrivă, orice număr întreg poate fi *descompus în factori primi*. Chiar mai mult, această descompunere nu se poate efectua decât într-un singur mod, ea este unică. În matematică, iubim cuvântul unic. Dacă un tip de obiect este unic,

dacă o acțiune este unică, putem folosi articolul hotărât: tipul, acțiunea. Vom vorbi deci despre descompunerea în factori primi a unui număr.

Spre a ști dacă un număr este prim, există întotdeauna o metodă: a verifica inexistența vreunui număr mai mic decât el care să îl dividă. Metodă greoaie, dar care dă mereu un rezultat. Iată definiția: un număr prim este un număr care nu este divizibil decât cu 1 și cu el însuși.

— *Această definiție m-a incomodat mereu. Divizibil cu 1, asta mă incomodează; la fel pentru divizibil cu el însuși? Ceea ce este interesant la 6 este faptul că se divide cu 2 și 3, nu cu 1 și 6.*

— Dar se divide cu 1?

— *Ce interes prezintă?*

— Te întreb dacă da sau nu, se divide cu 1?

— *Da.*

— Să avansăm încet. B și C sunt divizori ai lui A dacă $A=B \times C$.

Cum $6=2 \times 3$, 2 și 3 sunt divizori ai lui 6. Dar $6=6 \times 1$, deci, conform definiției, 6 și 1 sunt divizori ai lui 6. Oricare ar fi un număr n , $n=n \times 1$, deci n este divizibil cu 1 și cu el însuși. Iată de ce definim un număr prim ca neavând alți divizori decât 1 și el însuși. Este o bună ilustrare a modului în care matematica funcționează prin aplica-

rea, „cuvânt cu cuvânt”, a definițiilor. Dacă nu s-ar fi precizat „divizori, alții decât 1 și el însuși”, definiția ar fi fost falsă.

— *Sunt o mulțime de situații în care folosim 60, pentru ore, minute, secunde. 24 pentru zi, duzinile...*

— Da, a existat o luptă pentru supremație între 10 și 12. Superioritatea lui 12 rezida în marea sa divizibilitate, este mai divizibil decât 10.

Trebuie să împarți în mod egal o duzină de ouă între oamenii așezați în jurul mesei. Dacă sunt 2 oameni, 6 ouă pentru fiecare; dacă sunt 3, 4 ouă pentru fiecare; dacă sunt 4, 3 ouă pentru fiecare; dacă sunt 6, 2 ouă pentru fiecare. Patru situații favorabile.

Să presupunem acum că dispui de zece ouă. Două situații favorabile: 2 oameni, 5 ouă fiecare; 5 oameni, 2 ouă fiecare. Altfel spus, doisprezece admite șase divizori, 1, 2, 3, 4, 6, 12, în timp ce zece admite doar patru: 1, 2, 5, 10.

Să comparăm o sută și șaiszeci. O sută admite nouă divizori, în timp ce șaiszeci admite doisprezece: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Observă faptul că 60 este divizibil cu primele 6 numere, o mare realizare. Șaiszeci, care este mai mic decât o sută – aproape jumătatea sa – are mai mulți divizori decât o sută. Șaiszeci este asul împărțirii.

Când te deplasezi pe un cerc, se preferă 60, nu 100. Timpul este măsurat în ore de 60 de minute. O oră poate fi împărțită în două jumătăți de oră de 30 de minute, trei treimi de 20, patru sferturi de 15 minute, cinci cincimi de 12 minute și șase șesimi de 10!

— *Există numere cu și fără virgulă, care este diferența?*

— Îți amintești că dispuneam de două tipuri de numere, cele întregi și fracțiile. Precum știi, putem scrie oricând un număr întreg sub formă de fracție, aș spune chiar sub formă de fracții, la plural. 5 se scrie $\frac{10}{2}$, $\frac{15}{3}$ etc. Toate fracțiile al căror numărător este de cinci ori numitorul.

— *Și invers nu?*

— Unele fracții se pot scrie sub formă de număr întreg.

— *Când numărătorul este un multiplu al numitorului, tocmai ai spus.*

— În celelalte cazuri, nu se poate. $\frac{3}{2}$ nu va fi niciodată egal cu un număr întreg. A fost inventată o nouă scriere a numerelor, care are avantajul de a face să dispară linia de fracție: dezvoltarea zecimală a numerelor. Fără numărător și numitor, numărul se scrie pe un singur rând. O virgulă, la stânga sa o suită de cifre, *partea întreagă*,

la dreapta sa o altă suită de cifre, *partea fracționară*. 155,31 de exemplu. Această scriere generallă permite scrierea tuturor tipurilor de numere. Numerele zecimale sunt cele care posedă un număr finit de zecimale nenule: $\frac{1}{8}=0,125$. Pe de altă parte, $\frac{1}{3}=0,133$ nu este un număr zecimal.

— *Cum se procedează pentru a traduce o fracție în număr zecimal?*

— Este cel mai simplu cu putință, se împarte numărătorul la numitor. $\frac{5}{4}$ se scrie 1,25, în timp ce $\frac{10}{3}$ se scrie 3,333..., punctele de la dreapta indicând faptul că suita de 3 nu se termină. Cât despre 2, se scrie 2,0. Matematicienii arabi sunt cei care au definit numerele zecimale. 1325,2457, ce semnifică acest număr? Partea întreagă descompusă dă $1 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1$, la care se adaugă partea zecimală, $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000}$. Prima cifră de după virgulă este prima zecimală și așa mai departe.

Cu alte cuvinte, după virgulă procedăm cu zecimile, sutimile, precum înaintea sa cu zecile, sutele...

— *Au existat mereu numere negative?*

— O, nu! Numerele negative au apărut foarte târziu. Nici mesopotamienii, nici egiptenii, nici chinezii din Antichitate, nici măcar matematicienii greci nu au dispus de numerele negative.

— *Dar cum procedau fără numere negative?*

— Dintr-o cantitate a nu puteau scădea decât o cantitate mai mică, $b < a$. Dispuneau de o scădere limitată. În Europa, au fost dificultați în acceptarea noțiunii de „mai puțin decât nimic”.

Atunci când ne aflăm în fața imposibilității de a rezolva o problemă suntem constrânși să inventăm obiecte care ne vor permite să ajungem la liman. Atâta timp cât era vorba de a număra sau de a măsura mărimi fizice, numerele pozitive erau suficiente.

Cum să scazi 2 din 3? $(3-2)$ este egal cu acel număr care, adunat cu 2, dă 3. Acest număr este 1. Aici am scăzut cel mai mic din cel mai mare. Dar cum să scad cel mai mare din cel mai mic? Multă vreme acest lucru a fost imposibil. Pentru a fi posibil, trebuia creat un nou număr, care adunat cu 3 să dea 2. Acesta a fost „-1”. Efectiv, $2 - 3 = -1$, deoarece $3 + (-1) = 2$.

Fără prezența lui 0, numerele negative nu ar putea fi definite. Ce este -1? Este ceea ce trebuie adunat cu +1 pentru ca suma să fie 0.

Astfel, fiecare număr natural n are un „sime-
tric față de zero”, numărul negativ $-n$.

Numerele negative au fost inventate târziu,
mult mai târziu decât fracțiile. Primii care au
imaginat aceste noi numere au fost indienii, care
deja inventaseră zero. În secolul al VII-lea, ma-
tematicianul indian Brahmagupta exprimase nu-
merele pozitive și negative în termeni de beneficii
și datorii. Toate situațiile ce implică balanțe de
datorii și câștiguri nu pot exista fără o situație de
echilibru, *neantul*, în care câștigurile echilibrează
datoriile. Un câștig scăzut din nimic reprezintă o
datorie: $a > 0$, $0 - (+a) = -a$. O datorie sustrasă din
nimic reprezintă un câștig: $0 - (-a) = +a$. Produsul
și câtul a două câștiguri sau a două datorii este un
câștig: $a, b > 0$, $a \times b > 0$, $(-a) \times (-b) > 0$.

Produsul și câtul dintre un câștig și o datorie
este o datorie. $a \times (-b) < 0$, $\frac{a}{(-b)} < 0$. Dacă am șterge
o datorie...

— *Facem o donație! Îmi place ideea. Este o
altă viziune asupra lucrurilor.*

— Nu recunoști ceva cumva?

— *Oare nu o fi regula semnelor?*

— Perfect. O mie de ani după matematicienii
indieni, cantitățile negative ajungeau cu greu la
poarta imperiului numerelor din Occident. În

secolul al XV-lea, erau încă numite *numeri absurdi*, numere absurde. Mulți mari matematicieni le-au respins. Pentru a obține concret o cantitate negativă izolată, trebuia scăzut ceva din nimic: operație imposibilă, a scris Lazare Carnot, un mare matematician în anul 1802.

Astăzi, aceste numere nu mai pun niciun fel de probleme, întreabă-i pe copii. Pentru ei, -2 este al doilea nivel al subsolului parcării unde este garată mașina atunci când familia merge la cumpărături sâmbăta.

— *De ce se spune identități remarcabile și nu egalități remarcabile?*

— Deoarece sunt egalități mereu adevărate, oricare ar fi valorile date variabilelor ce figurează în cadrul expresiei. În gimnaziu, la liceu, nu sunteți puși să învățați pe de rost egalități, ci numai identități, tocmai pentru că acestea sunt întotdeauna adevărate.

Astfel, $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ este adevărată oricare ar fi valorile atribuite lui a și b . La fel pentru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. La fel pentru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Ai remarcat, toți termenii sunt de gradul 2: sunt produse de două numere: a^2 , b^2 , $2ab$ și $-2ab$. $a-b$ și $a+b$ sunt de gradul 1, deci $(a-b)(a+b)$ este de gradul 2.

Prima identitate $(a+b)^2$ este un produs: $(a+b)(a+b)$, pe care îl transformăm într-o sumă cu trei termeni. Să traducem: pătratul unei sume este egal cu suma pătratelor, adunat cu dublul produsului. La fel pentru $(a-b)^2$. A treia identitate este foarte interesantă, transformă un produs în sumă.

— *În diferență!*

— Bine, în diferență. În plus, cei doi termeni ai diferenței sunt pătrate. Și eu iubesc pătratele.

— *Pentru că sunt mereu pozitive?*

— Perfect. Ceea ce face ca eu să dispun de o informație suplimentară, este vorba despre o diferență între doi termeni pozitivi, a^2 și b^2 . Întotdeauna este utilă cunoașterea semnului unei expresii: dacă este un număr dat, știm ce semn are, dar dacă avem de a face cu o expresie scrisă cu litere (literală), nu știm acest lucru. Există totuși două expresii care ne oferă o asemenea indicație, pătratele a^2 și valorile absolute (modulele), $|a|$, mereu pozitive. Oricare ar fi valoarea lui a .

Dacă ne confruntăm cu o inegalitate $A < B$ și vrem să înmulțim cei doi membri cu un număr a , ce se întâmplă? Se păstrează sensul inegalității, aceasta este marea problemă. Dacă nu știu

nimic despre semnul lui a , nu pot deduce nimic privitor la inegalitatea dintre aA și aB . Pe de altă parte, aş putea scrie $a^2A < a^2B$. Fiindcă, atunci când înmulțim cei doi termeni ai unei inegalități cu un număr pozitiv, nu se schimbă sensul inegalității.

— *Și distributivitatea?*

— Este un joc între adunare și înmulțire. În funcție de ce avem de făcut, putem alege între a opera cu sume sau cu produse. Cheia dintre relațiile lor mutuale este *distributivitatea*, pe care o putem considera ca un „transformator”, ce permite transformarea unei sume într-un produs și, invers, a unui produs într-o sumă. Produsul dintre o sumă $(a+b)$ și o cantitate c este egal cu suma produselor $a \times b$ și $b \times c$: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$. Distributivitatea acționează asemănător cu identitățile remarcabile, transformă expresiile în altele mai practice, în funcție de necesități.

Geometrie

— Care sunt ființele ce populează spațiul geometriei?

— *Tot ceea ce vedem.*

— Numărul 3 îl vedem.

— *Tot ceea ce are o formă.*

— Numărul 3 are o formă.

— *3 îl scriem, o dreaptă o desenăm.*

— Bravo! Nu m-am gândit niciodată să o formulez astfel.

Ray o privi pe Lola cu o undă de admirație. Scânteile ei imprevizibile îl uimeau mereu. În secret, era mândru de ea.

— În primul rând, punctul. În general, îl uităm cu siguranță fiindcă nu există nimic mai mic decât el. Toate figurile sunt constituite din puncte, numai din puncte, care sunt, întrucâtva, atomii geometriei.

Apoi, există figurile plane, cele curbe, cercurile, elipsele, cele rectilinii, triunghiurile, patruleterele (pătrate, dreptunghiuri, romburi, paralelograme, trapeze) și toate poligoanele. Apoi, figurile în spațiu, cele *solide*, dintre care distingem, de partea celor curbe, celebrul trio sferă-cilindru-con, iar, de partea celor plane, piramidele. Să începem cu figura care ni se pare cea mai simplă, dreaptă. Care este cea mai mare calitate a sa?

— *Merge drept, nu face coturi, nu deviază...*

— ... nu-și schimbă niciodată direcția, menține orientarea, nu revine asupra pașilor săi.

— *De aceea vorbim despre axa timpului?*

— Da, timpul nu se întoarce niciodată. O singură dată avem cincisprezece ani! Trebuie profitat de asta. Multe fenomene naturale sunt legate de dreaptă. Planta, atrasă de cer, crește drept. Atrasă de Pământ, piatra cade drept. Apoi, lumina se deplasează în linie dreaptă.

O dreaptă este compusă dintr-o infinitate de puncte. Trebuie deci să cunosc o infinitate de puncte pentru a o defini? Două sunt de ajuns! Efectiv, „prin două puncte nu trece decât o dreaptă” este una dintre axiomele geometriei. Astfel, două puncte *definesc* o dreaptă. Ce înseamnă că „definesc”? Înseamnă că datele a două punc-

te sunt suficiente spre a defini o dreaptă. A și B fiind două puncte, putem spune deci „dreapta AB ”. Pornind de la aceste două puncte, le obținem pe toate celelalte, o infinitate!

Cea mai mare virtute a dreptei rezidă într-o proprietate: este cel mai scurt drum între două puncte. Este distinsă ca fiind modalitatea cea mai... directă de a uni două capete, într-un plan, insist.

— *De ce spui „insist”?*

— Deoarece nu este adevărat în alte spații geometrice, precum suprafața unei sfere, de pildă.

— *Trebuie să precizezi acolo unde este adevărat ceea ce este adevărat, nu-i așa?*

— Exact. Acum curbele. În timp ce dreapta nu are deviații, curba își schimbă direcția, fără a face vreun unghi. Rectiliniu, rectitudine, direct, direcție, aliniat – pentru dreaptă. Arc, curbat, inflexiune, ondulat, cambrat, rotund – pentru curbă.

Să luăm două drepte d și d' . Să presupunem că se întretaie în două puncte. Or tocmai am văzut că, prin două puncte, nu trece decât o singură dreaptă. Deci, dacă două drepte se întretaie în două puncte – sau mai multe – ele se confundă. Pot deci să afirm că dacă două drepte diferite se întretaie, acest lucru are loc într-un singur punct.

Obținem două propoziții simetrice: „două drepte definesc un punct”, „două puncte definesc o dreaptă”. Interschimbăm cuvintele *dreaptă* și *punct*, proprietatea rămâne adevărată! Iar dacă nu se întretaie...

— *Sunt paralele.*

— Nu neapărat! Ele pot să nu se întretaie și totodată să nu fie paralele. Ele pot, cum să spun, să se ignore, să treacă una pe lângă alta cumva. Cu siguranță, ai observat pe cer urme lungi și albe care se întretaie, traiectorii de avioane. Am putea spune că au avut mare noroc. De fapt, nu era niciun risc, traiectoriile nefiind în același plan, avioanele nu pot intra în coliziune.

Două drepte nu pot fi paralele decât dacă sunt în același plan, deci propoziția „două drepte sunt fie paralele, fie *secante*” nu este adevărată decât în plan. În spațiu, există o altă posibilitate: două drepte pot să nu fie nici paralele, nici secante. În treacăt fie spus, iată un bun exemplu pentru nevoia de a preciza în ce univers se afirmă un adevăr.

Deci, fie d și d' două drepte din plan. Dacă acestea au

- 0 puncte comune, ele sunt *paralele*;
- 1 punct comun, ele sunt *secante*;
- 2 puncte comune, ele sunt confundate și scriem $d=d'$.

Două puncte definesc o dreaptă. Tocmai am spus ceva fals!

— Două puncte M și M' nu definesc o dreaptă?
Ai spus aceasta ceva mai devreme.

— Nu am spus două puncte *distincte*.

— *Sunt distincte, din moment ce ai considerat două.*

— Am considerat două, desigur, dar nimic nu mă poate asigura că nu este ACELAȘI punct.

— *Dar nu au același nume! Unul se numește M și celălalt M' .*

— Da, dar nimic nu interzice ca M și M' să fie două nume diferite ale aceluiași punct.

— *Atunci?*

— Dacă doresc ca ele să fie diferite, solicit pur și simplu acest lucru. Precizez: două puncte diferite M și M' definesc o dreaptă. Dar trei puncte... diferite? Depinde de situația celui de-al treilea. Dacă este coliniar cu primele două, apariția sa nu aduce nimic nou, se află pe dreapta deja definită.

Dacă, dimpotrivă, nu este coliniar cu primele două, apariția sa schimbă totul! Cele trei puncte definesc un triunghi și mai definesc totodată un plan. Sosirea acestui punct *necoliniar* determină un salt formidabil, face trecerea de la o dreaptă la un plan, mărește în mod considerabil spațiul!

— *Apropo, două drepte care se întretaie câte unghiuri formează? Două? Patru?*

— Îți mărturisesc că și mie unghiul mi s-a părut mereu un obiect complicat. Unghi, de la cuvântul grecesc *ankon*, „cot”, sau din latinescul *angulus*, „colț”. S-a vorbit mult timp despre „înclinare”, un unghi fiind înclinarea unei drepte pe o alta. Este grăitor, dar nu este nici foarte precis, nici foarte operativ. Astăzi spunem: două drepte secante delimitează patru spații. Fiecare dintre ele este un unghi.

Aceste patru unghiuri nu sunt toate diferite între ele, cele opuse la vârf sunt egale. Au același vârf, iar laturile lor sunt paralele. Există deci câte două perechi de unghiuri egale.

Există un caz particular în care toate cele patru unghiuri sunt egale. Aceasta este definiția unghiului drept, este cel care ilustrează egalitatea celor patru unghiuri. Acolo nu mai vorbim de măsura lor în grade (hexazecimale sau zecimale), ci de o situație geometrică particulară, egalitatea a patru unghiuri, spre a defini într-un mod natural unghiul fundamental, unghiul drept, unghi de referință. Unghiurile mai mici decât cel drept, cele *ascuțite*, din latinescul *acutus*, cele *obtuze*, mai mari decât cel drept. Două

unghiuri drepte formează un unghi plat, patru fac un tur complet. Apoi, au fost definite unități de măsură a unghiului: cele două tipuri de grade și *radianul*, uneori și perioada.

— *De ce sunt unități diferite de măsură pentru unghiuri?*

— În timpul Revoluției Franceze, a fost definit un nou sistem de măsură, *sistemul metric zecimal*, cu unitățile sale, metrul, kilogramul etc., care se declină toate cu 10, multiplii și submultiplii lor fiind din 10 în 10. Prin aceasta era complet nou și mult mai ușor de utilizat decât sistemele precedente. Măsurile unghiurilor fiind, în mod obișnuit, bazate pe 60, s-a decis zecimalizarea lor, cu scopul de a fi integrate în noul sistem. S-a inventat gradul bazat pe 10, definit în așa fel încât unghiul etalon, cel drept, să măsoare 100 de grade.

— *Care este diferența dintre ortogonal și perpendicular?*

— Dacă ai în minte adjectivele, niciuna. Ortogonal vine din grecescul *orthos-gonos*, „unghi drept”, iar perpendicular, din latinescul *perpendicularum*, „fir cu plumb”. Firul cu plumb, precum știi, este vertical și face un unghi drept cu planul pământului.

Dar, ca substantiv, spunem o perpendiculară și niciodată o ortogonală, care nu există decât ca adjectiv. Vorbim de ortogonalitate și nu de perpendicularitate. Utilizarea principală a ortogonalității este calculul distanțelor. De exemplu, pentru calculul distanței de la un punct M la o dreaptă, „coborâm” perpendiculara din acel punct pe dreaptă. Aceasta taie dreapta în punctul H . Ei bine, distanța de la M la dreaptă este lungimea segmentului MH . Pentru a calcula distanța dintre două drepte paralele, se trasează o perpendiculară pe cele două drepte. Aceasta le taie în punctele H și H' . Ei bine, lungimea segmentului HH' este distanța dintre cele două paralele. Știi ce înseamnă paralel? Cuvântul provine din grecescul *paralelos*, „plasat la vedere”. Două drepte paralele se văd mereu una pe cealaltă, pe toată lungimea lor. Uite, în treacăt, ce pot deduce despre egalitatea dreptelor D și D' , dacă acestea sunt paralele? Nimic. Deoarece d este paralelă cu drepte diferite de ea însăși, dar este, de asemenea, paralelă cu ea însăși. Dacă $E \perp F$, ce pot deduce din asta? Pot afirma că $E \neq F$, deoarece o dreaptă nu este perpendiculară pe ea însăși.

Deseori, ortogonalitatea ne permite demonstrarea paralelismului. De exemplu, în plan, dacă

o dreaptă H este perpendiculară pe două drepte D și D' , acestea din urmă sunt paralele. Dacă $H \perp D$ și $H \perp D'$, atunci $D \parallel D'$.

— *De ce petrecem atâta timp asupra triunghiului?*

— Este cea mai mică figură rectilinie închisă.

Privirea Lolei trăda neînțelegerea.

— Explic ceea ce am spus. Nu putem construi un spațiu închis cu mai puțin de trei segmente. Cu două segmente, nu vei avea decât un spațiu deschis spre toate zărilor.

— *Vrei să spui că, dacă doresc să mă izolez, nu o pot face decât în interiorul unui triunghi?*

— Nu, afirm că, pentru a dispune de un spațiu închis, nu ai nevoie de o figură cu mai mult de trei laturi.

— *Dar cercul, totuși?*

— Am spus cu atenție ceea ce am spus: cea mai mică figură închisă RECTILINIE. Dacă uiți un cuvânt, devine fals.

— *Și e important?*

— Să fii într-un spațiu limitat sau nu? Este o deosebire capitală. Triunghiul, pătratul, cercul sunt închise. Dreapta, parabola nu sunt, ele sunt nelimitate. Ele nu delimitează o regiune a cărei arie poate fi calculată.

— Numai figurile închise au o suprafață, celelalte nu?

— Cum ai vrea să definești suprafața, aria unei regiuni nelimitate? Nu se știe ce este suprafața unei figuri deschise, acest lucru nu este definit. Astfel, nu vom vorbi niciodată despre suprafața unui unghi, nu are sens. Să revenim la triunghiuri, ce au toate în comun? Suma unghiurilor lor este egală cu 180° . Ceea ce face ca triunghiul să se „închidă”.

Această proprietate capitală îmi permite să afirm că, atunci când cunosc două unghiuri, îl cunosc și pe al treilea, dat fiind că le cunosc deja suma. Din nefericire, nu există un rezultat asemănător pentru laturi. Dacă eu cunosc lungimile a două laturi, nu pot să deduc lungimea celei de-a treia.

O altă consecință: un triunghi nu poate avea decât un singur unghi obtuz. Dacă ar avea două, suma lor ar fi mai mare de 180° ! Putem deci anunța faptul că nu există decât două tipuri de triunghiuri, cele care au trei unghiuri ascuțite și cele care au două ascuțite și unul obtuz. Referitor la triunghiul dreptunghic: dat fiind că unul dintre unghiuri este drept, suma celorlalte două, ascuțite, este de 90° .

Cunoașterea celor trei unghiuri ale unui triunghi nu determină lungimea laturilor, deci nu spune nimic despre „mărimea” sa, dar ne indică *forma*. Știm, de asemenea, că două triunghiuri care au aceeași formă, deci aceleași unghiuri, au laturile proporționale:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

— *Da, dar de ce sunt atât de importante triunghiurile?*

— Deoarece cu triunghiuri se pot construi toate poligoanele, oricare ar fi numărul lor de laturi. Rombul? Două triunghiuri isoscele identice, cu bazele lipite. Pătratul? Două triunghiuri dreptunghice isoscele identice cu ipotenuzele lipite. Dreptunghiul? Două triunghiuri dreptunghice identice cu ipotenuzele lipite. Când pleci în călătorie, nu te încarci cu toate poligoanele. Iei numai triunghiurile. Ai nevoie de un pentagon, scoate trei triunghiuri din geanta ta și ți-ai făcut pentagonul. Un octogon? Scoate șase.

Altceva: „vizibilitatea” triunghiului! O mașină gonește prin ceață, șoferul vede deodată un triunghi roșu pe șosea, frânează. Un camion este oprit pe dreapta. Șoferul a evitat accidentul. Pune un pătrat, un pentagon, un cerc, un triunghi. Înde-

părtează-te, care se distinge cel mai bine? De ce o fi ales Poliția Rutieră un triunghi spre a avertiza un pericol? Deoarece este figura cea mai vizibilă: are obligatoriu un unghi ascuțit, iar un unghi ascuțit „înțepă”. De altfel, spre a indica o direcție, desenăm o săgeată, adică o linie urmată de un triunghi. Iar litera greacă *delta* este reprezentată de un triunghi, Δ , care este forma deltelor fluviilor.

Să vedem care sunt legăturile dintre vârfuri și laturi. Fiecare vârf admite două laturi *adiacente*, fiecare unghi admite o *latură opusă*, una singură. Putem spune deci latură opusă la vârf. Dar nu putem proceda la fel în cazul unui dreptunghi, deoarece fiecare vârf are două laturi opuse.

Vom defini câteva linii remarcabile ale triunghiului, înălțime, mediană, mediatoare, bisectoare. *Înălțimea* este perpendiculara coborâtă dintr-un vârf pe latura opusă, lungimea sa este deci distanța dintre un vârf și latura opusă. *Mediana* este dreapta care leagă un vârf de mijlocul laturii opuse. *Mediatoarea unei laturi* este dreapta perpendiculară pe acea latură în mijlocul său. *Bisectoarea unui unghi* este semidreapta care împarte unghiul în două unghiuri egale.

— *Trei înălțimi, trei bisectoare, trei mediatoare, trei mediane. Triunghiul este regele lui trei!*

— Am putea-o spune. L-ai putea numi de asemenea un „trilaturi”. Să trasăm o mediatoare. Să trasăm o a doua, se intersectează cu prima, bine. Să o trasăm pe a treia, trebuie să se intersecteze cu celelalte două undeva, dar unde? Se intersectează cu ele în exact același punct unde s-au intersectat primele două! Și acest fapt este extraordinar. O adevărată surpriză, cele trei mediatoare se întretaie în același punct! Cum se poate explica acest eveniment? Deoarece, evident, există motive. Suntem în căutarea unei demonstrații. Demonstrația survine după surpriză, are ca scop răspunsul la întrebarea: de ce are loc o asemenea întâmplare uimitoare? Dacă va reuși, ea ne va dezvălui motivele. Faptul în sine poate va rămâne la fel de surprinzător, dar nu va mai fi un mister.

— *Este exact ceea ce îți spuneam mai înainte. În matematică totul se justifică, totul are un motiv.*

— Aceasta este convingerea matematicienilor, cel puțin. Ei vor să înțeleagă, să explice, să justifice. Ai prefera un univers în care nu ar fi nicio explicație la ceea ce se întâmplă?

— *Prefer un univers în care nu totul să aibă o justificare. Ceea ce nu înseamnă că doresc ca nimic să nu aibă o justificare.*

— Explicația nu înlătură minunea. Odată risipit misterul, rămâne frumusețea, care este

chiar mai mare atunci când înțelegem de unde provine. Dar nu am terminat cu surprizele; acest fapt surprinzător referitor la mediatoare are loc și în cazul bisectoarelor: se întretaie în același punct. Și medianele, și înălțimile se întretaie în același punct. Ele sunt *concurente*! Este ca și cum ar exista în triunghi, în forma sa geometrică, o forță de atracție care-i leagă elementele și le face să se întâlnească. Aceste puncte de intersecție sunt, evident, puncte remarcabile în triunghi. De exemplu, punctul în care se intersectează medianele este un loc strategic: *centrul de greutate* al triunghiului. Un mic experiment: așază un triunghi de metal pe un cui. Nu stă în echilibru și cade. Plasează cuiul în centrul de greutate, și triunghiul va sta în echilibru! Altă remarcă, ai observat deja noile scutere cu două roți în față? Sunt perfect stabile și, la oprire, conducătorul nu este nevoit să pună un picior jos pentru a-și păstra echilibrul scuterului. Deoarece trei roți, dacă nu sunt în linie, formează un triunghi! Iar triunghiul este stabil. Pentru a dispune de un vehicul stabil, nu este nevoie de o mașină cu patru roți.

— *Iată de ce am început cu o tricicletă!*

— *Vezi, e folositoare matematica.*

— *De ce există cazuri de congruență doar pentru triunghiuri?*

— Atunci când definim o familie de obiecte, primul lucru pe care îl facem este să decidem când avem dreptul de a declara că două dintre elemente sunt egale. În geometrie, două obiecte sunt egale dacă le putem suprapune, adică dacă elementele lor sunt egale. Trebuie deci trecute în revistă toate elementele componente și comparate. Ne putem întreba dacă există modalități mai „economice”, care să compare doar o parte dintre componente.

Să luăm drept exemplu cercurile. Pentru a demonstra egalitatea a două cercuri, este suficient să demonstrăm că diametrele lor sunt egale sau că circumferințele lor sunt egale. O singură egalitate este suficientă. Este normal, deoarece un cerc este complet definit de diametrul sau de circumferința sa.

Caz de egalitate a cercurilor: două cercuri sunt egale dacă diametrele lor sunt egale.

Dar pentru triunghiuri? Un triunghi este format din trei unghiuri și trei laturi. Ar trebui deci stabilite șase egalități pentru a realiza congruența a două triunghiuri. De fapt, cinci, deoarece, cunoscând două unghiuri, îl cunoaștem și pe cel de-al treilea. Există oare vreo variantă mai „economică”? Răspunsul este afirmativ. Acesta este

rolul celor trei cazuri de congruență. Primul caz, de exemplu: dacă două triunghiuri au o latură de aceeași lungime, cuprinsă între două unghiuri cu aceeași măsură, atunci sunt congruente. Două egalități de unghiuri și una de lungime, trei egalități în loc de cinci. Altă interpretare a unui caz de congruență: dacă îmi fixez o latură și două unghiuri adiacente, nu pot trasa decât un singur triunghi.

— *De ce, de fiecare dată când vreau să trasez un triunghi oarecare, trasez unul isoscel sau dreptunghic?*

— Este doar o impresie. Dacă ai măsura efectiv laturile, te-ai convinge că sunt diferite, la fel și pentru unghiuri. Triunghiurile oarecare, prin definiție, nu au proprietăți particulare, nu au laturi egale, nu au unghiuri egale, nu au unghiuri drepte. Or rezultatele pe care le obținem în matematică sunt consecințe ale proprietăților obiectului; cu cât este mai general, cu atât posedă mai puține proprietăți și cu atât se stabilesc mai puține rezultate cu privire la el. De aceea studiem cel mai des triunghiurile dreptunghice, isoscele sau echilaterale și pătratele și romburile.

Grecii spuneau că anumite triunghiuri aveau „două picioare egale”, deci le-au numit *iso-ske-*

los! Iso: „același”, skelos: „picioare”. Isoscele. Cât despre triunghiul care are trei laturi inegale, cel „oarecare” a fost numit mult timp „scalen”, triunghi șchiop.

Lola începu să râdă.

— *Triunghiurile șchioapătă, iar cercurile nu se învârt în cerc. Geometria este strâmbă!*

— Și totuși stă în picioare de douăzeci și cinci de secole! Am vorbit despre legăturile dintre triunghiurile dreptunghice și cele oarecare, apoi dintre triunghiuri și poligoane. Vom examina legăturile dintre poligoane și cercuri. Dacă iau un poligon, există un cerc care să treacă prin toate vârfurile sale? Dacă un asemenea cerc există, el poartă numele de *cerc circumscris* poligonului. Este cel mai mic cerc ce conține întreg poligonul. Demonstrăm că orice triunghi admite un cerc circumscris. Și că acest cerc este unic. De ce? pentru că, dacă două cercuri trec prin aceleași trei puncte, vârfurile triunghiului, acestea sunt identice. Cum se trasează acest cerc? Unde se află centrul său? În punctul de intersecție al mediatoarelor! De ce? mediatoarea joacă un rol foarte important pentru segmente. Este *locul geometric* al punctelor situate la distanță egală de capetele

segmentului. Dacă punctul de intersecție al mediatoarelor se află pe prima mediană, el este echidistant față de A și B , dacă se află pe a doua, este echidistant de B și C . Deci, este echidistant de A , B și C . Este deci centrul cercului ce trece prin A , B și C , deci al centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

— *Patrulatele au toate un cerc circumscris?*

— Nu. Pătratul și dreptunghiul admit unul, dar nu și romb, trapezul oarecare. După cum nici un patrulater oarecare. A admite un cerc circumscris este o „bună” proprietate pentru un patrulater care, în acest caz, este numit *inscriptibil*.

— *Triunghiul este regele lui trei, iar patrulaterul regele lui patru?*

— Nu. Un patrulater are, desigur, patru unghiuri, patru laturi etc., dar numai două diagonale. Am afirmat mai devreme că orice patrulater este compus din două triunghiuri. Suma unghiurilor unui triunghi fiind egală cu 180° , este o consecință firească faptul că suma unghiurilor unui patrulater este egală cu 360° , sau patru unghiuri drepte.

În același fel în care am clasat triunghiurile în funcție de anumite proprietăți vom clasa și patrulatele, punând în practică trei criterii: a avea

unghiuri drepte sau nu, a avea laturile opuse egale sau nu, a avea laturile opuse paralele sau nu.

Patru laturi egale: romb. Patru laturi egale și unghiuri drepte: pătrat. Unghiuri drepte și laturi opuse egale: dreptunghi. Laturi opuse egale: paralelogram. O pereche de laturi opuse paralele: trapez.

Pătratul este cel mai simplu dintre patrulate-re, este suficientă o singură informație, lungimea laturii, pentru a-l determina, pentru a-l *defini*, am putea spune deci, pătratul de latură 2. În cazul dreptunghiului, sunt necesare două informații, lungimile laturilor. Spunem dreptunghiul 2, 3. Cât despre paralelogram, avem nevoie de trei date, lungimile laturilor și valoarea unghiului format de aceste laturi.

— *De ce este importantă simetria?*

— Deoarece, atunci când o figură este simetrică, o putem reconstitui complet pornind de la o parte a sa. Cu o parte obținem tot. Simetria este o noțiune geometrică, nu există numere simetrice. Se disting două tipuri de simetrie, *simetria axială*, raportată la o dreaptă, și *simetria centrală*, raportată la un punct. Aceste două simetrii sunt legate: dacă o figură este simetrică în raport cu două drepte, este simetrică central în raport cu punctul de intersecție al celor două drepte.

Triunghiul isoscel este simetric în raport cu una dintre înălțimile sale. Triunghiul echilateral este simetric în raport cu cele trei înălțimi ale sale, deci în raport de simetrie centrală cu punctul de intersecție al acestora. Pătratul și romb sunt simetrice în raport cu cele două diagonale ale lor. În fine, cercul este simetric în raport cu toate diametrele sale, deci și în raport cu centrul său. Cercul este regele simetriei.

Ai remarcat că toate terenurile de sport pe care se confruntă două echipe sau doi jucători sunt simetrice față de o linie mediană? Fotbal, handbal, rugby, tenis, volei, ping-pong. De ce? pentru ca cele două echipe să dispună de un teren identic: *suprafață egală, aceeași dispunere a porților, a fileurilor, cu scopul de a nu fi favorizată niciuna dintre ele.*

— *La ce folosește cifra π ?*

— Cifra?

— *Bine, bine, NUMĂRUL π .*

— Este un număr care spune ce este un cerc, ne vorbește despre natura sa.

— *Când a fost descoperit π ?*

— Încă din Antichitatea timpurie, oamenii care se ocupau cu calcule au remarcat faptul că toate cercurile, indiferent de mărime, aveau ceva

în comun: diametrul și circumferința păreau a fi în același raport. Această legătură numerică părea independentă de mărimea cercului. Se putea deduce din scrieri că, pentru evrei, în Biblie, acest raport era egal cu 3; pentru babilonieni era $3 + \frac{1}{8}$, adică 3,125; pentru egipteni, cu șaisprezece secole înaintea erei noastre, $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,160$; pentru Arhimede, în anul 250 înaintea erei noastre, raportul era mărginit de 3,1408 și 3,1429; pentru chinezi, la începutul erei noastre era 3,162; în India, în secolul al III-lea, era noastră, era 3,1416.

Cercul posedă două elemente remarcabile, circumferința și diametrul.

Raportul dintre aceste două lungimi este constant, nu depinde de mărimea cercului. Valoarea sa *caracterizează* forma circulară.

Acest raport între „rotundul” circumferinței și „dreapta” diametrului a fost târziu denumit π în Occident, de la *periphēria*, „jur-împrejur”. Acest raport ne indică faptul că toate cercurile sunt asemănătoare: putem spunem că, în lume, toate cercurile sunt la fel, exceptând mărimea sau, altfel spus, că există un singur fel de a fi cerc.

Ceea ce nu este cazul pentru triunghiuri sau pentru dreptunghiuri, de exemplu, ele nu sunt asemănătoare, nu au toate aceeași formă.

— *Cu cât este egal π , exact?*

— Exact? Acesta este miezul problemei, Lola! Mă întrebi „care este valoarea sa exactă?”, îți răspund, „valoarea exactă a lui π este π !”

Figură mirată a Lolei.

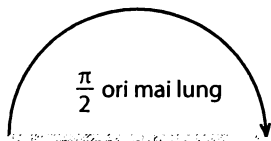
— Nu mă privi așa. Este singurul răspuns valabil.

— Și $\frac{22}{7}$?

— Dacă π ar fi egal cu $\frac{22}{7}$, l-am numi pur și simplu $\frac{22}{7}$ și nu am mai face din el, precum spui tu, „o brânză”, mergând în căutarea unei litere grecești. Îți voi da încă două exemple: dacă vrei să știi cu cât este egal 1 împărțit la 3, poți efectua operația și vei găsi 0,333333... Poți continua oricât de mult, nu va fi niciodată o valoare exactă. Se știe, în prezent, pentru că s-a demonstrat, că π nu se va putea scrie niciodată ca număr zecimal, după cum nici sub formă de fracție. Dar îl vom putea aproxima din ce în ce mai bine. I s-au calculat primele 1241 de miliarde de zecimale!

Singurul răspuns la întrebarea „cu cât este egal π ?” este „ π este egal cu π ”.

Apropo, te plimbi liniștită pe la țară și, în loc să mergi drept, te hotărăști să faci un ocol circular. Știi cât te va „costa”? Traseul tău va fi de $\frac{\pi}{2}$ ori mai lung! Cu aproximație de 1,57 ori mai lung!



Mă întrebai, adineaori, ce îți poate interesa pe matematicieni. Una dintre marile întrebări pe care și le pun și pe care și noi ne-o punem frecvent în viață: când solicităm ceva, căutăm care este „cel mai mic” obiect care corespunde acestei solicitări, *obiectul minimal*? Sau „cel mai mare”, *obiectul maximal*?

De exemplu, am un perimetru fixat și întreb, dintre toate figurile cu acest perimetru, care este cea care are cel mai mare „interior”. S-a demonstrat că este cercul. El este cel care înglobează maximum de spațiu într-un anumit contur. Iată o informație foarte utilă. Să presupunem că dispui, pe de o parte, de o îngrăditură neextensibilă

și, pe de alta, de o vacă. Pentru a-i oferi maximum de hrană, trebuie să-i faci o împrejmuire circulară. Cu orice altă figură, pătrat, triunghi, vei obține o suprafață mai mică. Dacă ai fi făcut o împrejmuire pătrată, ar fi fost de 0,786 ori mai mică și ai fi privat vaca de mai mult de 21% din iarba minunată!

— *De ce este atât de importantă teorema lui Pitagora?*

— Este, fără îndoială, una dintre primele teoreme din istoria matematicii. Era prezentă la mesopotamieni și la egipteni, care remarcaseră că anumite triplete de numere întrețineau un raport ciudat cu pătratul lor. Cunoști această relație, suma pătratelor a două dintre ele este egală cu pătratul celei de-a treia (3, 4, 5). Efectiv, $3^2 + 4^2 = 5^2$, (5; 12; 13), (6; 8; 10), (8; 15; 17), (12; 16; 20). Mai târziu, s-a demonstrat că, dacă laturile unui triunghi satisfac această legătură, triunghiul este dreptunghic. Pitagora va fi cel care va face această demonstrație, și de atunci înainte s-a vorbit de teorema lui Pitagora.

Acțiunea se desfășoară într-un triunghi, mai precis teorema spune: o informație despre un unghi (unghi drept), și furnizează o informație despre laturi și dimpotrivă.

Un triunghi este dreptunghic doar dacă laturile sale respectă relația $a^2+b^2=c^2$.

Deci, de fiecare dată când găsim trei numere astfel încât suma pătratelor a două dintre ele este egală cu pătratul celui de-al treilea, putem construi un triunghi dreptunghic. Această relație între lungimi ne oferă o metodă de a construi unghiuri drepte. Ne oferă, totodată, și metoda de a măsura lungimi: dacă am un unghi drept și cunosc lungimile a două laturi, teorema lui Pitagora îmi permite să calculez lungimea celei de-a treia laturi. Este o situație foarte frecventă.

Algebră

— *De ce spunem: fie x necunoscuta?*

— Deoarece x este tocmai ceea ce nu cunoaștem și vrem să aflăm...

— *Asta am înțeles, dar de ce necunoscută, la feminin?*

— Nu știu. Poate pentru că femeile sunt mai secrete, mai misterioase, mai greu de descoperit...

— *Și apoi pentru că pun mereu probleme, nu-i așa?*

— O cauți cu tot dinadinsul?

— *Da.*

— Mai bine spune-o direct. Atunci când încerc să aflu identitatea unui lucru, trebuie să încep prin a da un nume acelui lucru. Dacă nu îi dau un nume, nu voi avea cum să îl „țin sub control” și să îl cercetez. Ce opțiuni am? Să-i dau numele unui număr cunoscut? De exemplu 8. Ar fi stu-

pid. Dacă *a priori* decid că necunoscuta este egală cu 8, probabil ar fi fals. Problema ar fi rezolvată, dar pe o cale falsă! Și asta dinainte de a începe.

Îi voi atribui deci un nume temporar, x , care permite oricărui număr să fie necunoscuta pe care o caut, fără a restrânge, astfel, aria căutării mele.

Acest nume temporar îmi permite să lucrez, să efectuez calcule, pentru a avansa în identificarea necunoscutei.

Îi voi atribui acest nume doar momentan și, până voi fi ajuns la identificarea sa, necunoscuta se va numi x . Când o voi fi identificat, ea își va abandona numele de împrumut, luându-și ade-vărata identitate, pe care o voi fi descoperit-o.

Într-o anchetă, pentru a denumi persoana necunoscută, se spune „vinovatul”, „asasinul”, „suspectul”, uneori chiar „domnul x ” sau „doamna x ”. Ancheta ia sfârșit atunci când a fost „identificată” persoana căutată, deci vinovatul, asasinul.

Mai general, există o mare similaritate între rezolvarea unei probleme de matematică și o anchetă a Poliției: avem indicii, informații, piste, piste false, momente de exaltare, în care ai impresia că ai făcut progrese, sau de depresie în caz contrar, și, atunci, se încearcă găsirea unui cadru

coerent, în care totul devine clar, în care înțelegem, în sfârșit, ceea ce se întâmplă sau ceea ce s-a întâmplat și se pot aduce dovezi în acest sens.

— *Care este diferența dintre o egalitate și o ecuație?*

— Ei bine, $\frac{75}{3} = 25$ este o egalitate, $\frac{75}{3} - x = 0$ este o ecuație. $\frac{75}{3} - 25$ și $\frac{75}{3} - x$ nu sunt nici egalități, nici ecuații, după cum nici $(x-y)$. Putem spune doar că sunt expresii.

O egalitate este o expresie matematică, în care figurează semnul $=$ și numere cunoscute. În cazul unei egalități nu se poate pune decât întrebarea: „este adevărată sau falsă?” $\frac{75}{3} = 25$ este adevărată. $\frac{12}{7} - \frac{19}{11}$ este falsă, precum am văzut mai devreme.

— *Dacă este o egalitate, este adevărată!*

— Ei bine, nu! Reia definiția mea: o egalitate este o expresie matematică, în care figurează semnul $=$ și numere cunoscute. Cât despre ecuație, este o expresie matematică, în care figurează semnul egal, după cum și numere cunoscute și alte necunoscute: $2 \times x + 3 = 7$. O ecuație nu este nici adevărată, nici falsă, este expresia unei *constrân-*

geri, în cazul de față „dublul numărului x adunat cu 3 trebuie să fie egal cu 7”. Egalitățile și ecuațiile au doi *membri*. Mie îmi place să îi numesc *maluri*, cele două maluri ale semnului egal.

— *Constat că ești în continuare la fel de poet. Și ce curge între cele două maluri ale semnului egal?*

— Imaginează-ți! Marele joc, dacă pot să o spun, este acela de a face să treacă termeni de pe un mal pe celălalt. Pentru a trece de semnul egal, care este un fel de frontieră, trebuie respectate în mod imperios o serie de formalități.

A rezolva o ecuație constă în determinarea mulțimii de valori ale *necunoscutei* x , care satisfac constrângerea. Pentru a ajunge la aceasta, se transformă pas cu pas ecuația de la început într-o suită de ecuații echivalente, susceptibile de a ne conduce la soluție, până la „izolarea” necunoscutei în membrul din stânga, cu alte cuvinte, până la obținerea unei ecuații de forma $x=A$, A fiind o expresie numerică ce conține doar numere cunoscute. Diferitele valori ale necunoscutei sunt *soluțiile* ecuației.

Cum se procedează cu ecuațiile? Regulă de aur, dacă se modifică *exact în același fel* cele două părți ale unei ecuații, se obține o ecuație echivalentă, aceasta este arma principală. Adun

2 la dreapta, adun 2 la stânga. Multiplic cu 2 la dreapta, multiplic și la stânga etc.

Cum se manipulează necunoscuta? Se adună, se scad, se înmulțesc x exact ca și numerele cunoscute. La împărțire, atenție, dacă x este la numitor, trebuie stabilit să fie diferit de zero, știi de ce.

Căutând să izolez x la stânga, voi încerca, cum să spun, să trec maximum de lucruri la dreapta. $2x+3 = 7$. Pentru a face să dispară 3, adun -3 în ambele părți: $2x+3-3 = 7-3$, deci $2x=4$. Pentru a izola x pe malul stâng, trebuie să fac să dispară factorul lui x , 2. În acest scop, împart la 2 cei doi membri ai egalității. $\frac{2x}{2} - \frac{4}{2}$. Rezultatul $x=2$.

Iată necunoscuta identificată! Este important ca, înainte de a anunța rezultatul, să îmi iau o măsură de precauție: *verificarea*. Aceasta m-ar scuți de rușinea de a fi proclamat un rezultat fals. Înlocuind x cu 2 în ecuație, trebuie să obțin o egalitate, în acest caz verificarea reprezentând un succes: $2 \times 2 + 3 = 7$. Corect. Deci 2 chiar este un număr care satisface constrângerea fixată, este soluția ecuației.

— *Care este diferența dintre algebră și aritmetică?*

— Aritmetica este studiul numerelor naturale și al fracțiilor, în timp ce algebra este disciplina matematică al cărei obiect de studiu este teoria ecuațiilor. Grecii, experți în geometrie și aritmetică, nu au ajuns atât de departe încât să crezeze algebra. Această disciplină s-a născut pe malurile Tigrului, la Bagdad, la începutul secolului al IX-lea. Creatorul său, Mohamed al-Khwarizmi, un mare savant persan, a redactat *Kitab al jabr i al muqabala*, un „tratat de îndreptat oase și de pus față în față”, adevărata temelie a noii discipline. Cuvântul *al jabr* a dat „algebră”, adoptat astăzi în toată lumea. Cât despre Al-Khwarizmi, numele său latinizat, Algorismus, a dat substantivul algoritm, folosit în informatică, termen care semnifică „procedură sistematică spre a rezolva o problemă”, cel mai adesea pentru a efectua un calcul.

Prima utilizare a algebrei a privit chestiuni de moșteniri, deseori foarte complicate, guvernate de reguli extrem de stricte. Ecuațiile au fost instrumentul adecvat, care a permis determinarea părților atribuibile diverșilor urmași, în funcție de instrucțiunile din testamentul defunctului.

— În algebră, întâlnim mai multe litere decât cifre, ceea ce este paradoxal totuși. Variabile, parametri, ce le diferențiază?

— $2x+3=7$. Ce spune această ecuație? Produsul variabilei cu un prim număr, adunat cu un al doilea număr este egal cu un al treilea număr. Nu există vreun motiv pentru care cele trei numere implicate să fie egale, trebuie deci să le numesc diferit, a , b , c . Nu pe acestea încerc să le determin, ci necunoscuta x . Pot acum să descriu această ecuație în cuvinte, fără să mă agăț de valorile numerice: produsul variabilei x cu un prim număr, pe care îl numesc a : $a \times x$, adunat cu un al doilea număr, pe care îl numesc b : $(a \times x + b)$, trebuie să fie egal cu un al treilea număr, pe care îl numesc c : $(a \times x + b) = c$.

Această expresie este tot o ecuație, dar în care nu figurează nicio valoare numerică. De fapt, nu este o singură ecuație, ci o familie de ecuații. a , b și c folosesc la a descrie „forma” ecuației, ei sunt *parametrii*, ce permit scrierea ecuației generale de gradul întâi.

Fiecare tripletă de numere a , b , c definește o ecuație particulară, 2, 3, 5 definește ecuația $2x+3=5$. Să încercăm să rezolvăm ecuația generală: $a \times x + b = c$, $a \times x = c - b$ și $x = \frac{(c-b)}{a}$.

Pentru a elimina b , adun $-b$ de fiecare parte: $a \times x + b - b = c - b$, care se poate scrie $a \times x = c - b$.

Pentru a elimina a , este suficient să împart cu a în ambii membri. Și obțin, în sfârșit, ceea ce căutam: $x = \frac{(c-b)}{a}$. Ce interesam? Formula $x = \frac{(c-b)}{a}$ îmi permite să găsesc soluția tuturor ecuațiilor de gradul întâi.

Dacă ar fi fost x^2 în loc de x , am fi vorbit de ecuație de gradul al doilea. Gradul este exponentul cel mai mare ce figurează în ecuație.

Un alt exemplu: produsul dintre pătratul variabilei și un număr, adunat cu produsul dintre o variabilă și un al doilea număr, adunat cu un al treilea număr este egal cu un al patrulea număr. Deci, patru numere, a , b , c , d care permit scrierea formei generale a ecuației de gradul al doilea, $ax^2+bx+c = d$.

Descartes, care a fost atât filosof, cât și matematician, a generalizat folosirea literelor în ecuații, el a ales ultimele litere ale alfabetului x , y , z pentru a reprezenta necunoscutele și primele a , b , c , d ... pentru parametri.

— *Cum procedează chinezii, care nu au alfabet?*

— Trebuie să recunosc că nu știu nimic despre asta. Știi însă cum proceda marele matematician Brahmagupta, când erau mai multe variabile. El

a avut ideea de a utiliza culorile pentru a simboliza diferitele necunoscute prezente în ecuațiile sale, negrul pentru a doua necunoscută, albastrul pentru a treia, apoi galbenul, albul și roșul.

— *O algebră multicoloră! Nu cumva este un poem al lui Rimbaud care face același lucru cu vocalele?*

— Da, face. Îl știi? Hai spune!

— *Nu-mi mai aduc aminte.*

— *A, negru... E alb.*

— *Da, da, I roșu, O albastru, U verde.*

— Și-am terminat. Se vorbește deseori despre limbajul algebric. Unele expresii separate de + sau – sunt asimilate unor cuvinte: $3xy^2$. Acestea sunt *monoame*.

Cât despre șirurile de monoame separate de + sau –, acestea sunt asimilate unor propoziții, ele sunt *polinoame*. Limbajul algebric are nevoie de puține semne, de doar trei tipuri. Numere cunoscute, $2, \frac{3}{4}$; litere, $a, b, x, y...$, reprezentând numerele, apoi semnele: $=, >, <$, în fine, semnele celor patru operații, $+, \times, -, /$, exponenții, pătratul, cubul, și semnul rădăcinilor pătrate, $\sqrt{\quad}$.

Ah, eram pe cale să uit un semn foarte important, parantezele! Ele vin în perechi, una

deschisă „(», și una închisă: «)”. Sunt veritabile semne de punctuație, care folosesc la gruparea anumitor termeni consecutivi ce trebuie considerați ca un întreg. De exemplu, scriu $a+b \times c$. Ce ar putea însemna aceasta? Să fie oare suma dintre a și produsul $b \times c$ sau produsul dintre $a+b$ și c ? Așa cum este, scrierea nu permite vreo distincție, este ambiguă. Deci, trebuie proscrisă categoric, în matematică o expresie nu trebuie să aibă două semnificații diferite. Trebuie, așadar, inventate semne care vor înlătura ambiguitatea: parantezele sunt aceste semne. Cum vor permite ele ieșirea din acest impas? Dacă avem intenția de a vorbi despre suma dintre a și produsul $b \times c$, scriem $a+(b \times c)$. Dacă avem intenția de a vorbi despre produsul dintre $a+b$ și c , scriem $(a+b) \times c$. Parantezele au eliminat ambiguitatea!

— *De ce toate ecuațiile sunt egale cu 0 și nu cu 2 sau 3,14?*

— Pentru început, aș vrea să-ți reamintesc faptul că o ecuație nu este egală cu nimic. O ecuație este o ecuație și atât. Ceea ce mă întrebi este de ce membrul al doilea al ecuației este deseori egal cu 0. Oricare ar fi o egalitate $a = b$, o putem transforma într-o nouă egalitate, al cărei membru din dreapta este nul. $a = b$, $a-b = b-b = 0$.

$a = b$ este echivalent cu $a - b = 0$.

— *Putem face acest lucru, dar de ce l-am face?*

— Chiar așa, noi nu facem întocmai tot ceea ce am putea face. De ce este rentabil? Să reluăm ecuația de gradul întâi pe care o reprezentasem sub forma $ax + b = c$, cu trei parametri deci. Să o transformăm. $ax + b - c = c - c$, deci $ax + b - c = 0$. $(b - c)$ fiind un număr, îl reprezintă prin parametrul d . Ecuația devine $ax + d = 0$, având al doilea membru nul și doar doi parametri. Am găsit o formă generală simplificată. Ecuația este mai simplă și la fel de generală ca și cea precedentă. Acest lucru este adevărat pentru toate ecuațiile.

— *A factoriza, a dezvolta, în algebră ni se cere să facem fără încetare acestea...*

— Un factor este „cel care multiplică”. De aceea, în matematică, vorbim despre produs de factori și nu de sume de factori. Când ni se cere să *factorizăm* o expresie matematică, aceasta înseamnă că dorim să transformăm o sumă în produs. Dacă ni se cere să o *dezvoltăm*, este acțiunea inversă: dorim să transformăm produsele în sume.

$$(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$$

Citită de la stânga la dreapta, această identitate remarcabilă este o dezvoltare, un produs transformat în sumă. Citită de la dreapta la stân-

ga, este o factorizare, o sumă transformată în produs.

Și mereu aceeași predispoziție pentru produse relativ la sume. De ce sunt apreciate? Deoarece ne permit *simplificări*. Un exemplu: $a \times b = b^2 + b \times c$, factorizăm: $a \times b = b \times (b + c)$. Simplificăm $a = b + c$.

Recunoaște că acest lucru nu se vedea în prima scriere.

A face exerciții de algebră înseamnă, totodată, a face curat și a toca mărunț. Dăm peste cap expresiile, pentru a le transforma în alte expresii, echivalente, a căror formă ne convine, deoarece dispunem de informații asupra lor, furnizate de enunț sau apărute pe parcursul problemei.

Regula de aur: a schimba forma fără a schimba valoarea. Cea mai mică schimbare a valorii conduce la o eroare!

Deseori, unele lucruri pe care le facem în matematică par stupide.

— Ah, recunoști. Felicitări pentru luciditate.

— Așteaptă sfârșitul înainte de a striga victorie. Atunci când avem o expresie A și decidem transformarea sa în $A+2-2$, unui neavenit în matematică i se poate părea stupid acest lucru: la ce folosește să aduni 2 dacă îl scazi imediat după aceea? Ei bine, folosește!

Singurele transformări pe care avem dreptul să le efectuăm asupra unei expresii sunt cele care îi modifică forma fără a-i schimba „valoarea”.

În consecință, o mare parte a muncii depuse în domeniul algebrei constă în a porni de la o expresie A și a o înlocui cu o suită de expresii egale, până la obținerea uneia care ne convine.

Puncte și legături

— Problemele de geometrie sunt, deseori, dificile și nu ești tu cea care mă va contrazice.

— O, nu! Niciodată nu reușesc să văd în spațiu.

— Pe parcursul secolului al XVII-lea, doi matematicieni francezi, René Descartes și Pierre Fermat, au avut, independent unul de celălalt, ideea de a vorbi despre obiectele geometrice folosind limbajul algebric. Această idee a revoluționat matematica. S-a născut o nouă disciplină, *geometria analitică*, care s-a instalat alături de aritmetică, de geometrie, de trigonometrie și de algebră, lărgind și mai mult universul matematic. Grație noii discipline, în loc de a acționa direct asupra obiectelor geometrice, se acționează asupra expresiilor algebrice, infinit mai ușor de manipulat. Este un exemplu suplimentar al legăturilor țesute între spațiu și numere, între geometrie și algebră. A trata problemele de geome-

trie prin metode algebrice permite dispunerea de toate tehnicile de calcul din algebră puse în slujba geometriei.

Precum știi, punctul este cel mai simplu obiect al geometriei, este obiectul elementar, fiecare obiect geometric fiind constituit din puncte și numai din puncte. Am putea spune și că, dacă voi cunoaște „toate” punctele unei figuri, voi cunoaște figura însăși. Trebuie deci să încep prin numirea acestora, folosind un procedeu sistematic pentru atribuirea numelor lor. Pentru aceasta, este necesară definirea unui *reper*, cu alte cuvinte, a unui dispozitiv care permite localizarea și numirea tuturor elementelor dintr-o mulțime dată, fără ambiguități.

Facem acest lucru în mod constant în matematică (și în afara ei): *a da un nume obiectelor pentru a putea vorbi despre ele*. Putem chiar să dăm nume unor obiecte pe care încă nu le cunoaștem: de exemplu fie G un punct situat la distanță egală de trei puncte A , B și C date în plan. Dacă nu cunoaștem răspunsul, există două întrebări: există oare un asemenea punct? Dacă da, cum îl putem găsi? Atâta timp cât nu am răspuns la aceste două întrebări, punctul G este necunoscut, dar, totuși, a fost numit, spre a se putea vorbi despre el.

Este, ca atare, util să folosești drept reper alte obiecte deja cunoscute: cutare stradă, cutare monument, în viața cotidiană, dar, de asemenea, în geometrie: fie H piciorul perpendicularei, fie K intersecția dreptelor D și D' etc.

Acesta este punctul de plecare al ideii lui Descartes și Fermat: a încerca asocierea numelor „numerice”, a numerelor, cu niște puncte „geometrice”!

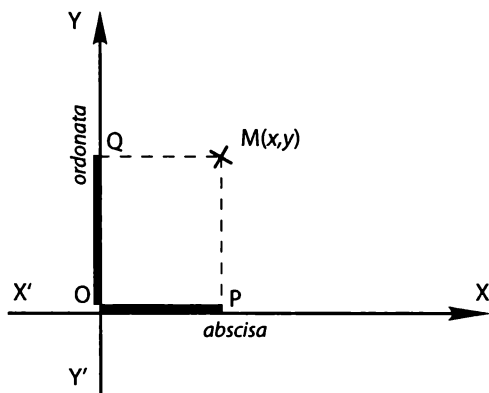
Superbă idee, care ar permite, în caz de reușită, utilizarea tuturor resurselor calculului și algebrei, ce reprezintă o mașinărie foarte sistematică, și apelul rar la intuiție, contrar geometriei. A încerca schimbarea cadrului, spre a fi mai eficace! Aceasta este frumusețea proiectului.

În geometrie, a numi un punct înseamnă a-l situa. Și pentru a situa ceva, este nevoie de un reper.

Fiecărui punct îi vom atribui numele locului pe care îl ocupă.

De exemplu, dacă spun: „sunt pe Autostrada Sud, la 30 de Lyon”, este extrem de insuficient: la 30 de ce? metri, kilometri? Și în ce direcție, spre Paris, spre Marseille? Pe de altă parte, dacă precizez originea (Lyon), direcția (Marseille) și unitatea (km), nu mai există vreo ambiguitate, știu unde mă aflu, chiar dacă autostrada nu este... o dreaptă geometrică.

Din aceleași motive, dacă un punct este pe o dreaptă, va trebui fixat un punct O al dreptei ca *origine*, o direcție (dreapta va fi *orientată*) și o unitate de lungime (*unitate*), pentru a nu fi nici o ambiguitate: numele „numeric” al unui punct M va fi valoarea algebrică a măsurii segmentului $x=[OM]$.



Dacă ne aflăm pe o dreaptă, un punct va fi reprezentat printr-un singur număr; într-un plan, două numere; în spațiu, trei. Motivul? Dreapta are o singură dimensiune, planul două, spațiul trei.

Al doilea univers, planul. Reperul este definit prin două axe orientate, XX' și YY' , care se

întretaie în O , care este originea sistemului de coordonate. În plus, pe fiecare axă se definește o distanță unitate.

Când cele două axe sunt perpendiculare, se afirmă că reperul este *ortogonal*. Dacă, în plus, unitățile au aceeași lungime, reperul este *ortonormat*.

Proiectând punctul M respectiv pe cele două axe, obținem două segmente OP și OQ , ale căror măsuri algebrice furnizează numerele x și y , care sunt *coordoanatele* lui M . x este abscisa, y ordonata. Iar M va fi numit cu perechea de numere (x,y) . Pentru un matematician, cel mai adesea, un punct din plan este o pereche de numere. Drept omagiu lui Descartes, coordonatele sunt numite *coordoanate carteziene*.

S-ar fi putut proceda și altfel, de exemplu dându-se o singură axă orientată, având originea O și definind punctul M prin distanța sa d față de originea O și unghiul θ dintre vectorii Ox și OM . Se vorbește în acest caz despre *coordoanate polare*. Vei observa că totuși avem nevoie de două numere, x și y în primul caz, d și θ în cel de-al doilea.

— *Exact ceea ce se întâmplă pe o hartă geografică, latitudine, longitudine. Longitudinea este abscisa, latitudinea ordonata. Axa ordonatelor*

este meridianul Greenwich, meridianul 0, iar axa absciselor este ecuatorul.

— Singura diferență este că planul este... plan, în timp ce harta geografică, precum și globul pământesc care se vrea reprezentat pe hartă sunt mai degrabă sferice. De aceea, pe glob, distanțele nu se evaluează în kilometri, ci în grade, 360° pentru longitudini și 180° pentru latitudini.

— *Mereu dreapta, planul și curba!*

— Exact, sunt mereu în centrul matematicii.

Toată această construcție de repere folosește în principal la reprezentarea de *funcții*. În viața cotidiană, întâlnim adesea expresiile „a depinde de”, „a rezulta din”, „a fi în funcție de”. Uneori, studiind anumite fenomene, remarcăm faptul că variațiile unuia provoacă variațiile celui alt: viteza și distanța, greutatea și înălțimea, prețul unei legume și greutatea sa etc. Desigur, încercăm să cunoaștem mai în detaliu legătura care unește cele două fenomene, sperând să o putem formula matematic.

La sfârșitul secolului al XVII-lea, Leibniz scria, în unul din textele sale, „*x este funcție de y*”. Cu vreo douăzeci de ani mai târziu, Jean Bernoulli folosește notația fx , „funcție de o cantitate variabilă x ”. Notația s-a păstrat. S-au născut noi entități

matematice, *funcțiile*, al căror studiu este o parte importantă a matematicii. Eficacitatea matematicii în studiul funcțiilor explică, în mare măsură, succesele sale atunci când este aplicată în alte discipline, în particular în fizică și astronomie.

În electricitate de exemplu: într-un circuit electric, legătura care unește tensiunea electrică U de intensitatea curentului care îl traversează, I , este exprimată prin funcția $U=I \times R$, R fiind rezistența electrică.

Iată funcția $f(x)=2x+5$. O pot considera o mașină dotată cu o intrare și cu o ieșire. Inerez numărul 1, mașina macină, multiplică 1 cu 2, adună 5 și scoate afară rezultatul: $y=7$. O anumită scriere îmi permite să rezum această acțiune a funcției: perechea $(1, 7)$, al cărei prim termen este numărul inserat, iar al doilea este cel produs. Aceasta exprimă ceea ce tocmai a dus la bun sfârșit mașina-funcție.

Continuăm prin introducerea numerelor 0, -1, $\frac{1}{2}$. Obținem perechile $(0,5)$, $(-1,3)$, $(\frac{1}{2}, 6)$. Fiecare dintre ele poate fi considerat ca nume al unui punct din plan. Altfel spus, mașina $[2x+5]$ produce toate punctele din plan a căror ordonată este dublul abscisei adunat cu 5. Toate aceste puncte

se află pe o dreaptă, pe care, în mod natural, o vom numi dreapta $y = 2x + 5$. Ba, mai mult, pot afirma că toate punctele a cărorordonată este dublul abscisei plus 5 se găsesc pe această dreaptă.

Funcție, curbă, ecuație, trei termeni pe care îi întâlnim deseori legați: ecuația unei curbe, curba reprezentativă a unei funcții.

— *Nu cumva aflăm aici un pic de etimologie?*

— Exact. *Repraesentare*, a face să fie prezent, *graphein*, a scrie. A reprezenta înseamnă a face să fie ceva prezent. Vom putea deci VEDEA această funcție sub forma sa algebrică!

Acesta este rolul reprezentării grafice: a oferi o „imagine” a funcției.

Ecuația unei curbe funcționează precum un dispozitiv ce permite generarea, după bunul plac, a numelui fiecăruia dintre punctele curbei.

— *Ce înseamnă „a verifica o ecuație”?*

— Punctul A (1,7) verifică ecuația $f(x) = y = 2x + 5$, deoarece înlocuind x cu 1 și y cu 7, obținem egalitatea $2 \times 1 + 5 = 7$. A se află deci pe curba reprezentativă a funcției $f(x) = 2x + 5$.

Ai impresia că vorbesc fără sens?

— *Nu, că te repeți. Dacă am înțeles bine, ești pe punctul de a-mi spune același lucru în moduri diferite.*

— Spun chiar mai mult, cunoașterea ecuației permite cunoașterea tuturor proprietăților geometrice ale curbei. Ce se observă dintr-o simplă privire aruncată asupra unei curbe? 1. În punctele unde este cel mai sus, ea se oprește din creșcut spre a descrește (*punctele de maxim*), iar în cele în care este cel mai jos, se oprește din scăzut spre a crește (*punctele de minim*). 2. *Punctele de inflexiune* sunt cele în care curba își schimbă curbura, trecând de la o deschidere spre partea de sus la o deschidere spre partea de jos. Și multe alte lucruri, precum *tangentele*, *punctele de intersecție*, în care taie axele XX' și YY' . Putem, de asemenea, cataloga dreptele raportate la alte drepte, paralele, secante etc.

În anumite cazuri, simpla „vedere” a ecuației ne permite să anunțăm care va fi forma curbei reprezentative. Astfel, toate funcțiile de gradul întâi, $f(x) = ax+b$, sunt reprezentate prin drepte, cele de gradul al doilea, $y = ax^2+bx+c$, cu a, b, c numere și $a \neq 0$, prin parabole. Se precizează $a \neq 0$, deoarece dacă $a=0$, funcția se reduce la $y = bx+c$, care este reprezentată, după cum tocmai am văzut, de o dreaptă.

Această dreaptă, această parabolă cum se obțin? În mod obișnuit, sunt trasate dintr-o mișcare

continuă, dar nu acesta este modul în care ele capătă efectiv o formă. De fapt, ele sunt produse punct cu punct, o intrare, un număr, o ieșire un număr. Două numere, deci un punct. Precum pe ecranul televizorului, pe care imaginea nu este „pictată” pe suprafață, ci constituită din puncte a căror aglomerare „formează” imaginea. Suntem mai degrabă în sfera broderiei decât a picturii. Această imagine este *graficul funcției*.

— *De câte puncte este nevoie pentru a construi acest grafic al funcției?*

— Atâtea câte numere se dau drept intrare.

— *Da, și câte numere se dau drept intrare?*

— Bună întrebare. Trebuie precizat. Mulțimea numerelor date drept intrare trebuie, în mod obligatoriu, să apară în definirea funcției, este *domeniul de definiție*.

Insist, două funcții care au aceeași ecuație și domenii de definiție diferite sunt diferite. Pentru a te convinge, funcția $f(x) = 2x+5$, al cărei domeniu de definiție este numărul 0, și funcția $g(x) = 2x+5$, al cărei domeniu de definiție este mulțimea tuturor numerelor, sunt diferite. Graficul primei funcții este redus la un punct, punctul (0,5); graficul celei de-a doua este o dreaptă! Nu este același lucru...

Problemele

— *Deseori, înțeleg teoria, dar nu sunt capabilă să rezolv problemele.*

— Ți se întâmplă ca, dimpotrivă, să rezolvi problemele fără a fi înțeles teoria?

— *Ei...*

— „Ei” înseamnă nu?

— *Da.*

— Problemele care ți se propun sunt o aplicare a teoriei. Sunt mereu legate de acea ramură a matematicii pe care o tratează cursul pe care îl parcurgi. Cu excepția problemelor de sfârșit de an care pot face apel la întreaga programă. Când propune o problemă, ce încearcă să facă profesorul? Pe de o parte, să se asigure că știi teoria, pe de altă parte, să evalueze aptitudinea ta de a o pune în practică.

— *De unde își găsesc profesorii problemele?*

— Din lucrări de specialitate, dar, deseori, le construiesc ei înșiși, în funcție de conținutul cursului lor și mereu în așa fel încât să le poți rezolva doar cu ceea ce ai învățat de la curs. Cu alte cuvinte, în principiu, dispui de tot ce ai nevoie pentru a te descurca.

Ți se pune la dispoziție cutia cu unelte, de tine depinde să știi să le folosești.

Aproape toate problemele sunt construite pe același tipar. Încep cu un text ce prezintă situația, „datele”. Acestea „schițează cadrul”, indicând: 1. unde ne situăm, în ce zonă a matematicii are loc „povestea”; 2. care sunt diverșii actori matematici, un triumf dreptunghic, fracții etc., și legăturile pe care le întrețin pe parcursul poveștii.

Problemele se termină cu o serie de întrebări, puse într-o anumită ordine. Trebuie mereu să-ți amintești că termenii prezentării au fost special aleși pentru ca fiecare dintre ei să ofere o informație de care vei avea nevoie spre a răspunde la întrebările adresate. În fața fiecărei informații, trebuie să te întrebi: de ce mi-o dă profesorul, ce vrea să îmi spună? Ce mesaj vrea să-mi transmită? Decodarea acestor mesaje constituie o parte importantă a muncii tale. Ca regulă generală, nu ți se dau mai multe date decât îți sunt necesare.

Ceea ce înseamnă că, pentru a rezolva problema, trebuie să le folosești pe toate. Iar dacă, fapt extraordinar, ai rezolvat toată problema fără a fi avut nevoie de una dintre date, fie ești genială, fie ai greșit undeva.

Iată o problemă care începe cu „fie ABC un triunghi isoscel”. Scriind această propoziție, profesorul ți-a transmis o informație pe care o decodezi instantaneu. Isoscel: două laturi egale, două unghiuri egale. Încă de la început, dispui de două egalități pe care – evident – te grăbești să le notezi pe o foaie specială, *foaia cu cunoștințe*. Dacă profesorul a mai spus și „isoscel în vârful A ”, cel de-al doilea mesaj îți permite să știi că laturile AB și AC sunt cele egale, iar unghiurile B și C sunt, de asemenea, egale; dar, deopotrivă, că înălțimea AH este și bisectoare, mediană și mediatoare, și că AH este o axă de simetrie a triunghiului. Adaugi aceste informații pe foaia de cunoștințe, ele vor constitui resursa ta pentru rezolvarea problemei.

Și întrebările? Ele sunt puse în funcție de date, iar ordinea în care acestea apar nu este arbitrară. Pentru a răspunde la una dintre ele, trebuie deseori utilizate răspunsurile la cele precedente. Dar, uneori, unele sunt independente, li se poate da un răspuns fără a fi aflat precedentele.

De unde se începe rezolvarea unei probleme? Munca ta va consta în a pune față în față ceea ce se cere și ceea ce știi deja. Și a încerca trecerea de la a doua la prima: prin ce mă va ajuta ceea ce știu în a da un răspuns la întrebare?

Vei fi nevoită uneori să „traduci” în scriere matematică termenii ce figurează în întrebare, adică să înlocuiești numele obiectelor cu definițiile lor.

Toate teoremele predate la curs sunt disponibile, inclusiv cele predate în anii anteriori! Dar, evident, nu toate se aplică la problema ta. Trebuie să le găsești pe cele care i se potrivesc. Aceasta este prima ta sarcină, să găsești teorema care s-ar putea aplica problemei tale. Ce înseamnă *a aplica*? „A pune un lucru peste alt lucru, astfel încât să îl acopere și să adere la el”, precum spune dicționarul.

Încearcă să-ți imaginezi două piese mecanice. Deții una și trebuie să o găsești pe cea care i se adaptează perfect. A demonstra că teorema se adaptează este cea de-a doua ta sarcină. După ce ai demonstrat acest lucru, o aplici. Și ea va fi cea care va duce greul. Concluzia teoremei îți este în prezent la îndemână. O poți adăuga la foaia de cunoștințe.

Atunci când situația de început este scrisă în limbaj curent, ca o povestire în franceză, trebuie

întâi să înțelegem ce ne povestește. Abia atunci poate începe munca de traducere a acestei povestiri în limbaj matematic. Este o muncă destul de subtilă. Deseori este partea cea mai dificilă, deoarece nicio formulă nu este capabilă să facă acest lucru.

Abia plecând de la această transcriere în limbaj matematic, ecuații, figuri, numere, egalități, inegalități, funcții, se intră în sfera matematicii.

Multe probleme sunt, de fapt, întrebări care vor fi abordate la cursul din anul următor. Ești pusă să demonstrezi o teoremă prea dificilă pentru nivelul tău. Dar îți va fi prezentată fragmentată de întrebări, care sunt tot atâtea trepte ce îți vor permite să urci tot mai sus fără mari greutate.

— *O scară!*

— Exact, problema este construită ca o scară care facilitează urcarea, în loc de a merge dintr-un pas la concluzie, ajungi la ea treaptă cu treaptă. În trecerea prin școală, rezultatele dobândite în anii precedenți nu devin învechite. O elevă de clasa a 9-a se presupune că știe tot ce a învățat în anii precedenți.

— *Există probleme proaste?*

— Ce înseamnă o problemă bună de matematică? Aceasta este o problemă în sine! Ipoteze bune, întrebări bune. Unele ipoteze nu sunt „fer-

tile”, nu crește nimic interesant pe terenul lor, doar bălării.

Unul dintre talentele matematicienilor este acela de a „simți” care sunt ipotezele bune. Ei sunt ca niște buni bucătari, care simt ce ingrediente, ce cărnuri, ce legume, ce condimente trebuie asociate pentru a face o mâncare delicioasă.

— *Cu toate cunoștințele tale gastronomice, păcat că nu ne faci mai des de mâncare!*

— Să revenim la alte mâncăruri. Când lucrăm cu un obiect, este utilă cunoașterea sa sub diferite forme, după cum și diversele sale proprietăți.

— *Cum vine asta, „sub diferite forme”?*

— O dreaptă. Geometric, este o linie trasată. Poate fi definită prin două dintre punctele sale sau prin intersecția a două plane neparalele și prin multe alte proprietăți. Algebric, poate fi definită prin ecuația sa, $y = ax + b$. Aceasta permite schimbarea cadrului: unele probleme de geometrie, de exemplu, sunt mai ușor de rezolvat în forma algebrică echivalentă. Te-ai putea distra căutând singură diferite formulări ale obiectelor pe care le cunoști.

— *Proprietățile sunt un atu?*

— Absolut, Lola, un atu pentru matematician și pentru elevi. O proprietate este o informație.

Cu cât este mai general un obiect, cu atât are mai puține proprietăți și avem mai puține informații despre el, deci mai puține „abordări” posibile. A lucra asupra unui obiect oarecare este dificil, deoarece nu ne putem baza pe mare lucru. De aceea, în probleme și, de asemenea, în teoreme se atribuie proprietăți obiectului spre a-l îmbo-găți. Decât să facem o problemă cu un triunghi scalen, mai bine precizăm că este dreptunghic, de exemplu. Putem spune mai multe lucruri referitoare la un triunghi dreptunghic decât referitoare la cel scalen. Din simplul motiv că tot ceea ce este adevărat pentru un triunghi scalen este adevărat și pentru un triunghi dreptunghic, dar nu și invers!

Înainte de a ne arunca cu capul înainte la prima întrebare a problemei, este mai bine să citim enunțul în totalitate, pentru a vedea încotro vrea să ne ducă. De altfel, nu este important să înțelegem totul din prima, deși acest lucru ne ajută și poate da idei de rezolvare. Pe de altă parte, anumite întrebări pot chiar să lămurească sensul întrebărilor precedente.

Raționamentul

— *Ce este o demonstrație?*

— Este un drum care merge de la situația de început, *ipoteza*, la cea de sfârșit, la rezultat, la concluzie. Cuvintele o spun foarte bine. *Hypo*, „dedesubt”, *thesis*, „a pune”, ipoteza pune situația de dedesubt, de bază. Cât despre concluzie, de la *conclusio*, acțiunea de a închide, ea încheie demonstrația.

O demonstrație se îndreaptă spre concluzie, luând-o pe un drum format dintr-o serie de „argumente”, dintre care fiecare este consecința celui precedent și cauză pentru cel ulterior. Cursul de matematică este o rezervă prețioasă de argumente, de rezultate, de teoreme, printre care poți înnota după bunul plac (!) pentru a rezolva problemele care îți sunt puse. De unde și necesitatea absolută de a cunoaște teoria.

— *De ce sunt atât de importante demonstrațiile? Am putea să ne debara... vreau să spun, să trecem peste ele?*

— Nu. Demonstrația este metoda pe care o deține matematica pentru a dovedi un lucru. Atunci când se enunță o afirmație, se pune, mai devreme sau mai târziu, problema deținerii unei metode de a se asigura de veridicitatea sau falsitatea acesteia. Cu alte cuvinte, trebuie construită o *dovadă*. O dovadă este un argument convingător, care determină adeziunea. Problema dovezii este o problemă capitală pentru oameni, în fiecare epocă istorică, iar tipul de dovezi ce pot fi aduse este diferit în funcție de domeniile în care se aplică: dovezile din medicină nu sunt de aceeași natură ca și cele solicitate în drept.

Matematica se dedă la stabilirea de adevăruri privitoare la familii de obiecte, cel mai adesea infinite, și nu la obiecte particulare. Desigur, n-ar plăcea să credem că este posibilă demonstrarea unui rezultat prin verificarea validității sale printr-un exemplu numeric. Or, fiecare situație numerică fiind unică, tot ceea ce am putea spune despre aceasta nu are valoare decât pentru aceasta și, deci, nu poate fi generalizat. Exemplele numerice, sau desene în geometrie, ne pot da idei

despre soluție, ne pot sugera anumite piste, ne pot ajuta la construirea unei demonstrații, dar nu pot fi considerate dovezi valabile. Există totuși o situație în care un exemplu negativ poate stabili un rezultat, dar un rezultat negativ! Dacă o proprietate nu se verifică într-un caz particular, nu este valabilă în cazul general. Este ceea ce se numește un *contra-exemplu*, singurul caz în care se trece de la particular la general.

Pe de o parte, nicio situație particulară nu are forța de a stabili tipul de rezultat general căutat. Pe de altă parte, obiectele vizate de rezultatul pe care încercăm să-l stabilim fiind în cantitate infinită, este zadarnic gândul că le-am putea analiza unul câte unul.

— *Atunci?*

— Atunci? Trebuie conceput un nou instrument capabil să ia în considerare trăsăturile generale ale obiectelor, bazându-se doar pe ceea ce este comun tuturor. Acest instrument este *demonstrația*. Fără îndoială, cea mai frumoasă creație a gânditorilor greci.

În secolul al V-lea înaintea erei noastre, grecii au inventat un sistem politic inedit în Occident, democrația, de la *demos*: „popor”, conducere a poporului. Se proclamă faptul că suveranitatea

provine de la popor, nu de la un rege, nici de la un conducător militar, nici de la un mare preot, nici de la Dumnezeu, ci de la cetățeni. În diversele sfere ale societății sunt puse în practică metode diferite. În sfera juridicului, pe parcursul proceselor, publice, trebuie aduse dovezi ale vinovăției sau nevinovăției acuzatului, dacă se poate, dovezi irefutabile, trebuie stabilite faptele, este nevoie de argumentare. Cele două părți se opun pe parcursul unui schimb de argumente.

În sfera politicului, cei ce aspiră la a deține o funcție de conducere trebuie să se prezinte în fața adunărilor de cetățeni, spre a-i convinge de aptitudinile lor, încercând să demonstreze că sunt cei mai buni pentru a conduce cetatea. Era, în principiu, sfârșitul arbitrariului, sfârșitul apelului la autoritate care proclama „Este adevărat pentru că așa spun eu”.

Un fenomen asemănător a revoluționat matematica în aceeași epocă: necesitatea de a aduce dovezi în sprijinul a ceea ce se enunță, obligativitatea justificării. Într-un cuvânt, nevoia de a demonstra. Nu mai este suficient să spui ceea ce ai descoperit, trebuie și explicat celorlalți oameni de ce este adevărat. Mai ales prin folosirea demonstrației, matematica greacă s-a distins de mate-

matica babiloniană, egipteană sau chineză, ea datorându-și, astfel, puterea extraordinară demonstrației. Matematica pe care o învățăm la școală și universitate, cea pe care o practică astăzi toți matematicienii din lume este moștenitoarea directă a matematicii grecești inventate în Antichitate. O demonstrație este, așadar, o dovadă, un tip particular de dovadă, proprie matematicii.

— *Cum se proceda înainte?*

— Se mulțumeau cu enunțarea rezultatelor obținute, fără a spune cum au fost obținute.

— *Matematica avea, să înțeleg, o altă față atunci?*

— O, da! Matematica chineză, de exemplu, care era foarte evoluată, nu avea totuși teoreme; aceasta funcționa pe principii complet diferite.

— *Cum, nu au existat dintotdeauna teoreme?*

— Nu! Încă odată, gânditorii greci au inovat, ei au dat naștere ideii de teoremă: enunț demonstrat matematic. O teoremă este compusă din două părți, începe cu *ipotezele*, care explicitează situația de început, și se termină cu *concluzia*: o afirmație matematică. Cea la care dorim să ajungem și pe care ne străduim să o demonstrăm. Știi de unde vine cuvântul? *Theorein* înseamnă „contemplare” în greacă.

— *De aceea se spune deseori despre matematicieni că sunt cu capul în nori?*

— Chiar vrei un răspuns?

— *Nu.*

— Mulțumesc. Cum ar trebui înțeles ceea ce ne spune o teoremă? Spune: dacă ipotezele sunt verificate, cu alte cuvinte, dacă sunt adevărate, concluzia este adevărată. Insist, teorema nu spune: „concluzia este adevărată”, ci „concluzia este adevărată dacă ipotezele sunt adevărate”. Astfel, într-o teoremă, ceea ce este adevărat nu este concluzia luată deoparte, ci cuplul ipoteză-concluzie. Oricum, aproape nimic nu este adevărat în orice fel de condiții!

— *Dar $2+2 = 4$?*

— Este valabil și pentru $2+2 = 4$. În baza 3, de exemplu, nu putem scrie $2+2 = 4$. Pentru simplul fapt că 4 nu există în baza 3. Această bază folosește doar trei cifre: 0, 1 și 2, după cum baza 2 folosește două, iar sistemul zecimal, zece. În baza 3, $2+2 = 11$! Deoarece $2+2 = 1 \times 3 + 1$, deci 11. Cumva nu este clar? În baza zece, ce cantitate reprezintă 11? Zece și o unitate. În baza 3, 11 reprezintă „un trei” și o unitate: $3+1$.

Lola rămase blocată. Apoi, în sfârșit, rosti:

— *Dacă $2+2$ nu mai este egal cu 4, totul se clatină în jurul meu!*

— Dacă nimic nu este adevărat în toate condițiile, nu înseamnă că totul este mereu fals. O teoremă este mereu urmată de demonstrația sa, adică de dovada că ceea ce afirmă este adevărat; este, într-o oarecare măsură, certificatul său de validare. Dacă în matematică nimic nu este adevărat în toate condițiile, ceea ce este adevărat rămâne mereu adevărat.

De felul cum este demonstrată, o teoremă intră în domeniul public și aparține patrimoniului matematic comun. Toată lumea poate, din acel moment, să o folosească. Nu există certificate de proprietate în matematică. Adevărurile matematice sunt neperisabile, nu putrezesc cu timpul. Dacă soliciți o teoremă, îți va fi livrată cu un certificat de garanție pentru eternitate. Matematica este singura companie umană care îți poate oferi o asemenea garanție.

— *Ei bine, pe mine acest lucru nu mă asigură de nimic. Adevărat pentru totdeauna, îți dai seama? Este dezamăgitor. Nimic din ceea ce vom face nu va putea schimba un adevăr matematic, asta e ceea ce vrei să îmi spui?*

Se lăasă liniştea. Ray îşi dădu seama de efectul pe care îl putea avea o asemenea declaraţie asupra unei tinere fete... care avea viaţa înainte. El vru să-i spună că matematica era – de asemenea – un tărâm al libertăţii, după cum declarase unul dintre cei mai mari matematicieni, Georg Cantor: esenţa matematicii este libertatea. Ar fi vrut să spună că nu trebuie să te „închini” în faţa adevărilor matematice, ci trebuie să afli cum au luat naştere, ce justificare au, cum fac corp comun cu celelalte adevăruri. Să-i spună că el însuşi nu era nemulţumit de faptul că există anumite aserţiuni stabile, intangibile, pe care te poţi sprijini. Da, asta era, adevăruri pe care se putea sprijini.

Ultima frază îi scăpase. Lola o prinse din zbor:

— *Eu nu m-am sprijinit niciodată pe teoreme, ele m-au zăpăcit, mai degrabă, şi încă bine de tot. Şi-apoi de ce trebuie să le învăţăm pe de rost?*

— Nu trebuie să le învăţăm pe de rost, trebuie să le înţelegem în adâncul lor. Să le cuprindem cu gândirea sensul profund: o teoremă duce la bun sfârşit o muncă, este un *cărăuş* care permite trecerea de la o aserţiune matematică la o alta, în mod direct. Iată ce ne declară: dacă dispun de acestea (ipotezele), atunci sunt sigur că dispun de aceasta (concluzia).

Dar, atenție, o înțelegere adâncă înseamnă și că trebuie să le cunoaștem cuvânt cu cuvânt. Fiecare cuvânt din enunț este necesar, dacă omiți unul, devine fals, dacă modifici unul, devine fals din nou. Iar teorema nu mai este teoremă.

— *De ce nu spui direct, teorema devine falsă?*

— O teoremă este o propoziție adevărată. Deci o teoremă falsă ar fi... o propoziție adevărată care ar fi falsă! Desigur, au existat în istoria matematicii teoreme despre care s-a observat mai târziu că ceea ce afirmau era fals.

— *Au fost totuși demonstrate!*

— Da, dar demonstrația era falsă! Aceasta s-a produs, destul de rar, trebuie spus, atunci când matematicianul uita să menționeze printre ipoteze o proprietate pe care o folosea totuși, dar care nu era demonstrată. El se înșela! Atunci când o teoremă este fixată, aceasta implică o dublă responsabilitate, cea a autorului, dar și cea a comunității matematice care răspunde de această teoremă, care este responsabilă de justetea rezultatelor stabilite în cadrul său. „Scoaterea pe piață” a unei teoreme nu este autorizată decât după aprobarea de către un juriu a tezei prezentate la universitate sau de către un comitet de lectură a unei gazete de specialitate.

Să luăm exemplul teoremei lui Pitagora. Se pare că egiptenii știau că triunghiul cu laturile 3, 4 și 5 era dreptunghic, fapt confirmat de teorema lui Pitagora: chiar avem $3^2 + 4^2 = 5^2$, dar ceea ce afirmă teorema lui Pitagora este de altă natură decât ceea ce știm despre triunghiul (3, 4, 5). Ea ne spune că: *într-un triunghi dreptunghic, pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor*. Este adevărat pentru toate triunghiurile dreptunghice și nu doar pentru cel cu laturile (3, 4, 5). Spre a fi mai precis, ar fi trebuit să mai adauge, ceea ce este subînțeles, că acest lucru nu este adevărat decât dacă triunghiul este plan. Este fals pentru un triunghi sferic, de exemplu.

Pentru a rezuma, dacă verificarea funcționează într-un caz particular, nu există niciun motiv ca ea să funcționeze în toate cazurile. Pe de altă parte, dacă există un caz în care nu se aplică, ea nu mai este valabilă în cazul general. Este una dintre cele mai frecvente erori de raționament.

— *Ce alte tipuri de erori fac elevii?*

— Știi de unde provine cuvântul „eroare”? De la cuvântul latin *error*, „a rătăci”, a fi pierdut. Când faci o greșeală, te abați de la „drumul adevărului” în demonstrația ta și te rătăcești.

Erorile sunt numeroase și de natură diferită. Unele se raportează la un domeniu particular, se

referă la scriere, la propoziții prost construite, îți amintești? Altele se leagă de raționament, în mod independent de domeniul în care sunt comise: erorile de logică.

— *Ce este logica, până la urmă?*

— Am putea spune că este știința care studiază regulile gândirii.

— *Orice gând este logic? Și poezii au o logică deci?*

— Ridici o problemă interesantă. Rectific, ar trebui spus: logica este domeniul gândirii raționale. Aristotel, marele filosof atenian, a pus bazele ei. La origine, era parte a filosofiei, astăzi, este o ramură a matematicii. Legea absolută care guvernează gândirea logică este *principiul non-contradicției*: o aserțiune și contrara sa nu pot fi ambele adevărate. Nu putem afirma „un lucru ȘI contrariul său”.

Se respinge, de exemplu, ideea că două drepte se întretaie ȘI sunt paralele, sau că un număr impar este divizibil cu 2. A doua lege, cea a *terțului exclus*, afirmă că o propoziție este fie adevărată, fie falsă, și că, în aceste condiții, nu există o a treia posibilitate. Dintre o aserțiune A și contrara ($\text{non } A$), una dintre ele sigur este adevărată. Atunci, fie A , fie ($\text{non } A$) este adevărată. Dacă ($\text{non } A$) este adevărată, A este falsă. Și dacă ($\text{non } A$) este

falsă, A este adevărată. Ceea ce implică faptul că dispunem mereu de două căi spre a demonstra o aserțiune A . Calea directă: a demonstra că A este adevărată și calea indirectă: a demonstra că ($\text{non } A$) este falsă. Depinde de tine să alegi una sau alta, în funcție de situație. Uneori, datele problemei au fost alese special pentru a nu putea rezolva problema decât pe calea indirectă.

— *Logica se învață la liceu?*

— Da, dar abia în ultimul an. Este păcat că nu se studiază mai devreme, ar trebui predată încă din clasa a 10-a, precum filosofia, de altfel.

— *Matematica și filosofia sunt legate, dar acest lucru nu se vede niciodată la curs.*

— Da, la origine, erau strâns legate. Mulți mari matematicieni erau filosofi și mulți mari filosofi erau matematicieni. Ne-am intersectat deja cu Descartes, Leibniz, Pitagora. Dacă nu se vorbește despre asta la curs, este pentru că programele sunt prost concepute. Și nu mă pune să vorbesc despre subiectul acesta, bine?

— *Ba da, ba da!*

— La școală nu se pune accentul suficient pe noțiunile fundamentale; trebuie petrecut cel mai mult timp încercând înțelegerea acestora, asupra acestui lucru ar trebui să se concentreze maxi-

mum de efort. Atâta timp cât nu sunt înțelese, nu se poate merge mai departe. În plus, ele reprezintă cel mai interesant lucru din matematică.

— *Și care sunt noțiunile fundamentale?*

— Ne-am petrecut aproape tot timpul vorbind despre ele: ideile! sensul! Limbajul matematic, raționamentul, demonstrația, teoremele, semnul egal, *implicația*.

Chiar așa, nu am vorbit încă despre implicație. Vrei să vorbim despre implicație?

— *Am un chef nebun de asta.*

— Dorința ta bruscă de cunoaștere mă copleșește.

— *De când știi că ești mare bucătar.*

— Îți voi găti un mic meniu de implicații *al dente*.

Logicienii au creat un verb, „a implica”, și un semn care îl reprezintă, săgeata \Rightarrow : „implică”. Acest semn nu se aplică numerelor sau obiectelor geometrice de exemplu, nu se referă decât la propoziții, referindu-se la valoarea lor de adevăr. De aceea, este clasat în rândul operatorilor *logici*.

Când scriu „ $P \Rightarrow Q$ ”, pe care îl pot înțelege și ca „dacă P , atunci Q ”, ofer informația că valoarea de adevăr a lui P atrage după sine valoarea de adevăr a lui Q . Q se poate deduce din P printr-un raționament logic.

Implicația și egalitatea sunt, fără îndoială, cuvintele cele mai importante din matematică. Sunt fundamentale în elaborarea și gestionarea oricărui raționament. Acesta este motivul pentru care simbolurile corespunzătoare lor, \Rightarrow și $=$ se întâlnesc în toate domeniile matematicii, nu precum $+$ sau $//$, care sunt semne ce au sens doar în domenii specifice ale universului matematic.

— *Al dente! E cam greu de înghițit săgeata dublă.*

— $P \Rightarrow Q$. Două propoziții, fiecare putând fi adevărată sau falsă. Sunt deci patru posibilități.

— *Patru? Fals poate implica adevărat?*

— Poate! Oricât de ciudat ar părea, falsul poate implica atât adevărat, cât și fals. Plecăm de la $1 = 3$, ceea ce este, evident, fals. Adun 2 de o parte și de alta a egalului: obținem $1+2 = 3+2$, adică $3 = 5$, ceea ce este fals. Fals implică fals. Dar cum $1 = 3$, pot aduna 3 în partea stângă și 1 în partea dreaptă și obținem $1+3 = 3+1$, ceea ce este adevărat. Fals implică adevărat.

— *Ce zi! Fals implică adevărat! $2+2$ nu este egal cu 4!*

— Nu este mereu egal, rectifică Ray. O singură situație este exclusă, adevărat implică fals. Nu se poate accepta ca, pornind de la un adevăr și

raționând corect, să se ajungă la un rezultat fals, deoarece, dacă ar fi astfel, totul s-ar duce de râpă. Gânditorii greci spuneau: „din adevăr, nu poate izvorî fals”. Piatra unghiulară a raționamentului și încrederea pe care o avem în el se datorează unui principiu: dacă suntem în sfera adevărului și raționăm corect, rămânem în această sferă. Nu avem niciun risc de a cădea în sfera falsului. Cum am putea raționa fără această certitudine? Activitatea principală a matematicienilor pentru a produce rezultate constă în a alege propoziții adevărate și a *deduce* din ele alte propoziții adevărate. Astfel, stocul de propoziții adevărate nu va înceta să crească.

— *Crezi că așa se întâmplă și în viață?*

— Nu voi avansa pe acest teren alunecos.

— *Ce înseamnă a deduce?*

— *Deducere*, „a extrage”, în latină!

Lola bătu din palme:

— Eram sigură că îmi vei da o lovitură etimologică! Dar este o imagine frumoasă.

Lola tăcu și se adânci într-o reflecție profundă, pe care Ray o respectă.

— *Deci, a deduce înseamnă a extrage? Extrag o propoziție dintr-o alta. Îi dau naștere.*

Și cu un zâmbet fermecător:

— *Lola, geniu feminin al matematicii...*

— Hei, Lola, încotro?

— *Are legătură cumva cu condițiile necesare și suficiente?*

— Ajungem unde trebuie! În viața de zi cu zi, folosim deseori expresiile „ajunge să”, „este nevoie să” sau „trebuie să”. Ce se înțelege din „*Este necesar să fie frig pentru a ninge*”?

— *Fără frig, nu ninge!*

— Dar nu „frig, deci ninge”!

— *Poate să fie frig fără să ningă.*

— Ce se înțelege din „*Este suficient ca soarele să strălucească pentru a se crăpa de ziuă*”?

— *Sunt sigură că s-a crăpat de ziuă de cum bate soarele.*

— Dar nu „s-a crăpat de ziuă, bate soarele”!

— *Chiar așa, se poate să se crape de ziuă și ca soarele să fie ascuns după nori, de exemplu.*

— Facem un duet perfect. Lola, ești un... – reluă – ești O as. Fie Q și P două aserțiuni...

— *Aserțiune? Care este diferența față de propoziție?*

— O propoziție este o structură bine formată, deci care are un sens, dar care nu are o valoare de

adevăr fixată, în timp ce o aserțiune este o propoziție considerată drept adevărată.

Deci fie Q și P două aserțiuni. Q este o *condiție necesară* pentru a avea P dacă, de îndată ce P este adevărată, obligatoriu Q este adevărată. Exemplu, „ D este un paralelogram” este o condiție necesară pentru „ D este un romb”, ceea ce se scrie: „ D este un romb” \Rightarrow „ D este un paralelogram”. Atenție aici, nu este ușor.

— *Nu există niciun romb care să nu fie, simt nevoia să spun deja...*

— *Spune deja.*

— *... care să nu fie deja paralelogram. Pe de altă parte, există paralelorame care nu sunt romburi.*

— Condiția nu este suficientă! Ceea ce îmi permite să trec abil la ... Q este o *condiție suficientă* pentru a avea P dacă, de îndată ce P este adevărat, Q este și ea necesarmente adevărată. „ D este un pătrat” este o condiție suficientă pentru „ D este un paralelogram”.

— *Este suficient să fie pătrat pentru a fi paralelogram. Altfel spus, precum zici tu: toate pătratele sunt paralelorame. Dar aceasta nu este o condiție necesară, deoarece ar fi adevărat și dacă D ar fi un dreptunghi.*

— Și scriu „ D este un pătrat” \Rightarrow „ D este un paralelogram”. Și apoi, este, cum îi spuneiți voi? Acel *must*. *Must* este condiția necesară ȘI suficientă! Matematicienii se dau în vânt după ea. Semnul, mai întâi: o săgeată dublă. Ce înseamnă $P \Rightarrow Q$? Dacă P este adevărat, Q este adevărată și dacă Q este adevărată, P este adevărat. Ceea ce înseamnă că P și Q sunt simultan adevărate sau false. Matematicienii își petrec timpul încercând să găsească propoziții echivalente. Deoarece, dacă am una dintre ele, o am și pe cealaltă. Uneori spunem că „ P este adevărată *dacă și numai dacă* Q este adevărată”.

— *Profesorul nu încetează să repete: trebuie să vă știți formulele.*

— O formulă eu o văd ca pe o formă de calcul, o scriere condensată ce folosește numai simboluri, un fel de „program” informatic. Din acest motiv, formulele sunt programabile pe un calculator.

Formulele sunt considerate ca niște poveri de către majoritatea elevilor, dar vrei să-ți spun sincer? Ele sunt un adevărat cadou pentru elevi. Încearcă să rezolvi o problemă, nu contează care, fără a utiliza nicio formulă. Îți urez multă baftă. Abia atunci vei veni la mine: „Ray, te rog frumos, dă-mi formule.”

— *Și tu ce-mi vei răspunde?*

— Voi deschide cufărul comorii, plin de formule ce strălucesc în mii de culori, și îți voi spune: alege-ți!

— *Elevii au noroc deci?*

— Am putea-o spune. La origini, *formulă* era folosită în medicină, pentru a desemna regulile după care un remediu trebuia administrat. În afara acestor reguli, utilizarea remediei provoca accidente. La fel se întâmplă și cu o formulă matematică: trebuie obligatoriu precizată situația în care aceasta a fost elaborată și condițiile în care ea trebuie aplicată.

În majoritatea cazurilor, problemele puse elevilor se referă la domenii în care există formule! Pentru început, trebuie aleasă formula necesară, dintre toate cele pe care le oferă cursul. Apoi, trebuie verificat să fie identice condițiile problemei și cele ale formulei. Odată efectuată această verificare, nu mai rămâne decât să *aplici* formula, prin înlocuirea literelor ce figurează în formulă cu cele omoloage din problemă. Apoi, apoi, formula face singură toată munca!

Deseori, se consideră că expresia matematică ESTE formula. Greșit, formula este formată din expresia matematică ȘI prezentarea situației, adi-

că a condițiilor în care este validă. O formulă nu este „ $x = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$ ”, ci „Fie ecuația de gradul al doilea cu o singură necunoscută, $ax^2 + bx + c = 0$. Dacă expresia $b^2 - 4ac > 0$, ecuația are două rădăcini,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ „}$$

Dintr-odată, Lola întrebă:

— *Ție, personal, ți se pare că matematica este simplă sau complicată?*

— Nu este simplă, deloc.

— *„E simplu, Lola, TREBUIE să ajungi la concluzie!” De câte ori am auzit asta! Dar dacă este simplu ȘI eu nu ajung la bun sfârșit, înseamnă că sunt proastă, nu?*

— Oh! O dovadă de deducție corectă. Nu, eu nu-ți voi spune așa ceva, eu îți spun „E dificil, Lola, dar vei ajunge la final.”

— *În final, avem dreptul de a nu iubi matematica?*

— Nu putem obliga pe nimeni să iubească ceva sau pe cineva. Iubirea nu se ordonă, dar se poate învăța a iubi ceva ce nu ne place.

— *Ceva ce nu ne place deloc deloc?*

— Nu este niciun risc să încerci. Da, avem dreptul de a nu ne plăcea matematica, după cum avem dreptul de a nu ne plăcea alte materii. Dar nici nu este un titlu de glorie a le detesta pe toate. Este totuși preferabil să le cunoști puțin înainte să declari, definitiv, că nu îți plac. Bunica ta îmi spunea mereu: „Întâi gustă, apoi vei putea spune că nu îți place”.

— *Ceea ce faci tu cu mine, aici, este să mă faci să gust niște matematică?*

— Într-o oarecare măsură. Iar degustarea nu s-a încheiat. Mai avem destule domenii de vizitat.

— *Nu s-a încheiat? Am avut mereu impresia că am descoperit deja totul în matematică și nu mai rămâne nimic de aflat!*

— Ai pune această întrebare la fizică, la biologie sau la geografie? Nu. Nu au existat niciodată atâția matematicieni, atâtea rezultate noi, atâtea teorii noi, atâtea întrebări, atâtea probleme enunțate. În fiecare zi, chiar în fiecare oră, noi teoreme sunt demonstrate. Oh, nu neapărat foarte interesante, dar sunt rezultate inedite, care nu fuseseră demonstrate înainte.

De 2500 de ani, în majoritatea civilizațiilor, au existat fără încetare matematicieni. În fieca-

re epocă, s-au confruntat cu două tipuri de probleme. Probleme vechi, nerezolvate încă, și probleme noi, legate de noile matematici. Probleme vechi, care rezistaseră tentativelor matematicienilor precedenți, erau rezolvate, deoarece noi instrumente de lucru fuseseră create, noi rezultate erau stabilite, noi teorii erau construite, care le lipsiseră matematicienilor din generațiile precedente. Noi discipline au fost create, trigonometria, teoria probabilităților, geometria analitică, statistica...

Un alt proces face ca tărâmul matematicii să fie inepuizabil: crearea de noi obiecte. Iată cum anume are loc acest lucru. Un matematician hotărăște să studieze o familie de obiecte. Are nevoie de instrumente. Dacă cele aflate la dispoziția sa nu sunt suficiente, este împins să construiască unele noi. Or instrumentele în cauză sunt și ele noi obiecte matematice. Iată cum este creată o nouă familie de obiecte. Matematicianul decide să le studieze. Pentru aceasta, are nevoie de noi instrumente, care vor fi, la rândul lor, obiect de studiu... Fluviul matematicii nu este gata de a seca.

— *Vrei să spui că, în generațiile viitoare, copiii nu pot spera că nu vor mai exista noi matematici?*

— Exact, mai bine nu s-ar baza pe asta.

— *Și cu „cucuiul matematicilor” cum rămâne?*

— Ce-i cu el?

— *Ai întâlnit oameni care să îl aibă?*

— Îmi place când faci pe naiva! Am întâlnit persoane foarte dotate pentru matematică, altele care cântau minunat la pian, altele care desenau divin, altele care erau nemaipomenite la alergări. Dar niciodată nu am auzit vorbindu-se de cucuiul muzicii, al desenului sau al atletismului.

— *Atunci de ce matematica este singurul domeniu care are un „cucui”?*

— Pe la 1800, un anume Franz Gall, medic anatomist, a crezut că a observat o excrescență la nivelul craniului. El s-a grăbit să tragă concluzia că era semnul unei aptitudini remarcabile pentru matematică. Astfel lua naștere cucuiul matematicilor! Nimic însă nu a venit ulterior să confirme declarațiile lui Franz Gall. Cum cucuiul era zdravăn, expresia a rămas. Ceea ce a permis multor oameni care nu înțelegeau nimic din matematică să motiveze că ar fi din cauza cucuiului pe care nu-l aveau și fără de care nu puteau face nimic. Fără cucui, nicio speranță! Pe de altă parte, studii recente au permis localizarea unor zone ale creierului „specializate” în diverse operații aritmetice, adunarea ici, înmulțirea colea.

Ray se întrerupse:

— Hei, era să uit. Cum se comportă implicația în cazul propozițiilor negative? „ D este un pătrat” \Rightarrow „ D este un paralelogram”. Dacă facem trecerea la propoziții negative? Ce ți-ai dori să se întâmple, Lola?

— *Ar trebui să-mi doresc ceva?*

Privirea insistentă a lui Ray o incită să-și do-rească ceva:

— *Aș spune „ D nu este un pătrat” \Rightarrow „ D nu este un paralelogram”. Dar, dacă îmi pui această întrebare, probabil că nu se întâmplă astfel.*

— Să analizăm! Dacă D nu este un pătrat, ar putea fi, de exemplu, un paralelogram. Am avea deci „ D este un paralelogram” \Rightarrow „ D nu este un paralelogram”.

— *Oroarea ororilor, nu-i așa?*

— Ba chiar mai mult. Eroarea pe care tocmai ai făcut-o este una dintre cele mai des întâlnite.

Atunci când se trece la propozițiile negative, se schimbă sensul implicației

Dacă $P \Rightarrow Q$, atunci $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ și nu $(\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)$.

— *Tot ceea ce nu este adevărat este fals. Acest*

lucru mi se pare simplist. Între apa care fierbe și cea înghețată există intermediari...

— „Astăzi, 1 ianuarie 2008, numărul de degete de la mâinile Lolei devine unsprezece.” Este fals, nu pe jumătate fals. Propozițiile studiate în matematică nu au decât două posibilități, adevărate, false. Este destul de sumar, e drept, dar există o mulțime de propoziții în viață care sunt în aceeași situație.

— *Omul era „pe jumătate mort”!*

— Un om pe jumătate mort este în viață. Din nefericire, atunci când ești mort, nu ești doar pe jumătate.

Se lăasă liniștea.

— *În matematică, trebuie justificat tot ceea ce afirmi?*

— Încă un lucru care îți va plăcea. Sunt interzise „vezi ceea ce vreau să spun”, „este evident”, „ai încredere în ceea ce îți spun”. Ceea ce ar părea evident este uneori fals. Și ceea ce pare fals se dovedește uneori adevărat. Este adevărat în matematică, este adevărat și în viață.

— *În matematică încrederea nu este suverană!*

— Chiar așa, nu are nimeni încredere *a priori*. Orice propoziție afirmată nu este acceptată decât

dacă este însoțită de demonstrația sa. Dar, atunci când este acceptată, i se acordă o încredere absolută. Nu avem încredere în oameni, dar avem încredere oarbă în ceea ce au stabilit.

— *Dacă vrei să îți spun, pentru mine, rigoarea are un aer militar.*

— Asta e „matematica în kaki”! Totuși, ar trebui să meditezi la acest lucru, care nu este prea militar, chiar dimpotrivă. În matematică, o afirmație nu este adevărată deoarece eu – șeful, regele, preotul, stăpânul – sunt cel care o spune, nu este adevărată pentru că eu sunt cel mai puternic. Este adevărată pentru că îți aduc dovada în acest sens și tu poți singură să-i verifici acuratețea.

Lola aprobă clătinând din cap.

— *Nu vorbim despre rigoare decât în matematică! Nu și la franceză, la geografie, nici măcar la fizică.*

— Totuși, nu crezi că există rigoare în poezie? Un poem este orice, numai nu cuvinte aruncate unul după altul, are muzicalitate, măsură a versurilor, asonanțe. Toate acestea sunt dovezi ale rigorii. Sau muzica?

Ei bine, este o greșeală să nu se vorbească despre aceasta decât la matematică. Fiecare domeniu

are rigoarea sa. Trebuie spus și faptul că în matematică, mai mult decât în alte părți, ea are un rol creator. Explic: uneori, datorită implicării rigorii în tratarea unei probleme, s-a putut descoperi ceea ce nu se putea vedea prea clar atâta timp cât eram într-o stare de imprecizie. O mare parte a puterii – și a interesului – matematicii provine de la rigoarea la care apelează în definirea obiectelor, în stabilirea rezultatelor, în investigarea dovezilor pe care le elaborează. Această rigoare, din punct de vedere psihologic, putem să nu o îndrăgim.

— *Atunci?*

— Atunci nu am iubi matematica și nici nu am muri din atâta lucru.

— *La ce folosește matematica?*

— Iubirea la ce folosește?

— *Compari iubirea cu matematica?*

— Ceea ce este important trebuie neapărat să „folosească”?

Ce este folositor pe lumea asta?

— *Dar nu merg la liceu să învăț despre iubire sau prietenie.*

— Ci să înveți?

— *Să învăț, exact.*

— Ce să înveți?

— *Ceea ce îmi va folosi.*

— Și ce este ceea ce îți va folosi?

— *Asta tu știi.*

— Dar tu ce-ai vrea să înveți, să știi, să înțelegi?

— *Mă voi gândi la asta, spuse ea cu voce joasă. E rândul meu, Ray! Sunt curioasă să știu ce poate să-ți placă în matematică.*

— De ce mă întrebi ce *poate* să-mi placă în matematică și nu, pur și simplu, ce-mi place? Chiar ești curioasă să afli?

— *Eh... în sfârșit, da.*

— Finețea, rigoarea, eficiența, precizia, eleganța raționamentelor, surprizele pe care ni le rezervă și frumusețea.

— *Frumusețea?*

— Exact, FRUMUSEȚEA. Există demonstrații elegante și altele necizelate, stângace.

— *Măcar acum este clar. Suntem complet opuși, suntem...*

— Spune-o!

— *Diametral opuși.*

— Ce vrei să spui prin asta?

— *Că nu putem fi mai opuși decât suntem.*

— Vezi, matematica este folositoare!

Privindu-l pe Ray cu emoție:

— *Nu am petrecut niciodată atâta timp împreună. Îmi pare rău doar de faptul că nu ai stat tot atâta timp să te joci cu mine.*

— Nu este niciodată prea târziu pentru a începe.

Cuprins

La ce se referă matematica?.....	5
Numerele.....	21
Geometrie	51
Algebră.....	77
Puncte și legături	91
Problemele	101
Raționamentul	109